Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

Вариант МА11002

15 а) Решите уравнение $3\sin 2x+\sin^2 x=0$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

$a)$ $3\sin 2x+\sin^2 x=0,\quad 6\sin x\cos x+\sin^2 x=0,\quad \sin x(6\cos x+\sin x)=0,$

$\sin x=0$ *или* $6\cos x+\sin x=0,\ |:\cos x\neq 0,$

$x=\pi n,\ n\in Z$

$6+tgx=0,$

$tgx=-6,$

$x=-arctg6+\pi n,\quad n\in Z.$

$б)$ *Отрезку* $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$ *принадлежат корни уравнения* $-\pi;\ -arctg6;\ 0.$

Ответ: $a)$ $\pi n,\ n\in Z;\quad -arctg6+\pi n,\quad n\in Z.$

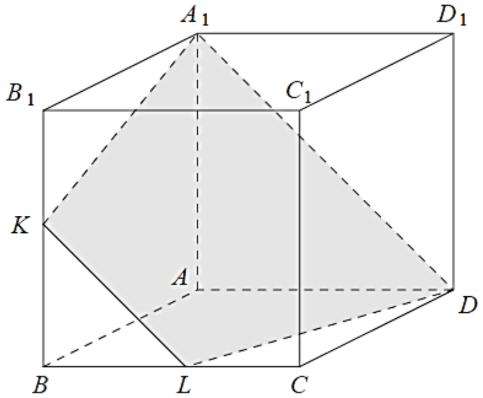
$б)$ $-\pi;\ -arctg6;\ 0.$

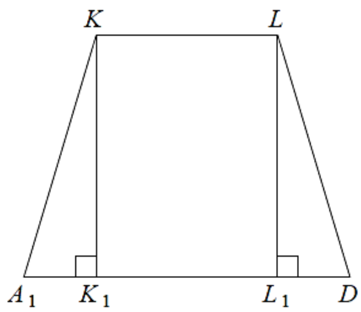
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

16 На ребре BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбрала точка K так, что $KB = 5$ и $KB_1 = 4$. Постройте сечение куба плоскостью A_1DK и найдите его площадь.

Решение.

Ясно, что ребро куба равно 9. Поскольку грани куба ADD_1A_1 и BCC_1B_1 параллельны, плоскость сечения пересекает их по параллельным прямым A_1D и KL, где L лежит на BC. Треугольники A_1AD и KBL подобны, поэтому $BL = KB = 5$ и $LC = KB_1$. Значит, треугольники A_1B_1K и DCL равны, откуда $A_1K = DL$. Равнобедренная трапеция A_1KLD – искомое сечение. Найдём её площадь. Основания трапеции равны $A_1D = 9\sqrt{2}$ и $KL = \sqrt{2} \cdot KB = 5\sqrt{2}$, боковая сторона $LD = AK = \sqrt{9^2 + 4^2} = \sqrt{97}$. Проведя высоты $KK_1 = LL_1$ трапеции, найдём $A_1K_1 = DL_1 = \dfrac{A_1D - LK}{2} = 2\sqrt{2}$ и $KK_1 = LL_1 = \sqrt{97-8} = \sqrt{89}$. Тогда площадь трапеции равна $KK_1 \cdot \dfrac{A_1D + KL}{2} = \sqrt{89} \cdot 7\sqrt{2} = 7\sqrt{178}$.





Ответ: $7\sqrt{178}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено ИЛИ при правильном ответе решение недостаточно обоснованно.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

17 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{9}}(7-6x)\cdot\log_{2-x}\frac{1}{3}\geq 1.$

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} 7-6x>0, \\ 2-x>0, \\ 2-x\neq 1, \end{cases}$$

откуда $x\in(-\infty;\ 1)\cup\left(1;\ \frac{7}{6}\right)$. Для таких x получаем:

$$\frac{\log_{\frac{1}{9}}(7-6x)}{\log_{\frac{1}{3}}(2-x)}=\frac{\log_{\frac{1}{3}}(7-6x)}{2\log_{\frac{1}{3}}(2-x)}=\frac{\log_{\frac{1}{3}}(7-6x)}{\log_{\frac{1}{3}}(2-x)^2}.$$

Исходное неравенство примет вид: $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}}(7-6x)}{\log_{\frac{1}{3}}(2-x)^2}\geq 1.$

Рассмотрим исходное неравенство при $x\in(-\infty;\ 1)$, тогда $(2-x)^2>1$, откуда $\log_{\frac{1}{3}}(2-x)^2<0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{3}}(7-6x)\leq\log_{\frac{1}{3}}(2-x)^2;\ 7-6x\geq 4-4x+x^2;\ (x+3)(x-1)\leq 0;\ -3\leq x\leq 1,$$

откуда $x\in[-3;\ 1)$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x\in\left(1;\ \frac{7}{6}\right)$, тогда $(2-x)^2<1$, откуда $\log_{\frac{1}{3}}(2-x)^2>0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{3}}(7-6x)\geq\log_{\frac{1}{3}}(2-x)^2;\ 7-6x\leq 4-4x+x^2;\ (x+3)(x-1)\geq 0;$$

$$x\leq -3,\ x\geq 1,$$

откуда $x\in\left(1;\ \frac{7}{6}\right)$.

Ответ: $[-3;\ 1);\ \left(1;\ \frac{7}{6}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением/исключением точек x = 1, x = 7/6, x = -3, ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

18 Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, проходящая через точку P, второй раз пересекает первую окружность в точке A, а вторую – в точке D. Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD, второй раз пересекает первую окружность в точке B, а вторую – в точке C.

а) Докажите, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

б) Найдите отношение $BP : PC$, если радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй.

Решение.

а) Обозначим $\angle BAD = \angle PAB = \alpha$. Поскольку $ABQP$ и $CDPQ$ – вписанные четырёхугольники,

$$\angle BQP = 180^\circ - \alpha,$$
$$\angle CQP = 180^\circ - \angle BQP = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha,$$
$$\angle ADC = \angle PDC = 180^\circ - \angle PQC = 180^\circ - \alpha.$$

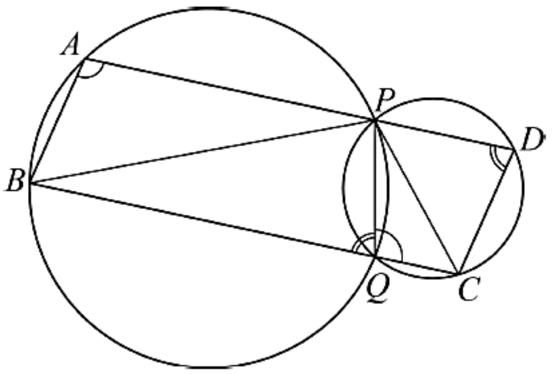
Значит, $\angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$, и поэтому $AB \parallel CD$. Противоположные стороны четырёхугольника $ABCD$ попарно параллельны, следовательно, это параллелограмм.

б) Пусть R – радиус второй (меньшей) окружности. Тогда радиус большей окружности равен $2R$. По теореме синусов

$$BP = 2 \cdot 2R\sin\angle BQP = 4R\sin(180^\circ - \alpha) = 4R\sin\alpha,$$
$$PC = 2R\sin\angle CQP = 2R\sin\alpha.$$

Следовательно,

$$\frac{BP}{PC} = \frac{4R\sin\alpha}{2R\sin\alpha} = 2.$$



Ответ: 2.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а,* ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

19 15 июля планируется взять кредит на сумму 900 000 рублей. Условия его возврата таковы:
- 31-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить некоторую часть долга.

На какое минимальное количество месяцев можно взять кредит при условии того, чтобы ежемесячные выплаты были не более 100 000 рублей?

Решение.

Заметим, что меньше, чем за 10 месяцев погасить кредит не удастся, поскольку за 9 месяцев суммарно будет выплачено не более 900 000 рублей, что покроет первоначальную сумму долга, но не покроет процентов. Будем считать, что долг на 15-е число каждого месяца уменьшается по сравнению с предыдущим месяцем. За 10 месяцев долг составит не более чем $1{,}01^{10} \cdot 900\,000 \le 995\,000$ рублей, то есть возрастёт не более чем на 95 000 рублей, а, значит, десятый платёж полностью погасит кредит.

Ответ: 10.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно.	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

20 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2+(1-a)^2=|x-1+a|+|x-a+1|$ имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$x^2+(a-1)^2=|x+a-1|+|x-a+1|.$$

Если x_0 является корнем исходного уравнения, то и $-x_0$ является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень, только если $x_0=-x_0$, то есть $x_0=0$. Подставим значение $x=0$ в исходное уравнение:

$$(1-a)^2=2|1-a|;\ |1-a|\cdot(|1-a|-2)=0,$$

откуда либо $|1-a|=0$; $a=1$, либо $|1-a|=2$; $a=-1$ или $a=3$.

При $a=1$ исходное уравнение принимает вид $x^2=2|x|$. Корнями этого уравнения являются числа -2; 0 и 2, то есть исходное уравнение имеет более одного корня.

При $a=-1$ и при $a=3$ уравнение принимает вид $x^2+4=|x-2|+|x+2|$.

При $x<-2$ это уравнение сводится к уравнению $x^2+2x+4=0$, которое не имеет корней.

При $-2\le x\le 2$ получаем уравнение $x^2=0$, которое имеет единственный корень.

При $x>2$ получаем уравнение $x^2-2x+4=0$, которое не имеет корней.

При $a=-1$ и при $a=3$ исходное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: $a=-1$; $a=3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Обоснованно получены оба значения a, но в ответ включено не более одного постороннего значения a.	3
Обоснованно получено одно из значений a.	2
Получен один из следующих результатов: - задача сведена к исследованию квадратных уравнений, полученных после раскрытия модулей; - есть утверждение о симметрии корней исходного уравнения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

21 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 9, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 52.

Решение.

а) Задуманные числа 2, 2, 2, 2 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 9 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{52}{9}$, то есть 5. Кроме того, числа 10 и 11 меньше, чем сумма двух чисел 9, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $52-9-10-11=22$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 9, оставшиеся задуманные числа — это 11 и 11 или 22. Для задуманных чисел 9, 10, 11, 11, 11 и 9, 10, 11, 22 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 9, 10, 11, 11, 11 или 9, 10, 11, 22.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: - пример в п. *а*; - обоснованное решение в п. *б*; - обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; - оба набора задуманных чисел в п. *в*.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

НОМЕР ЗАДАНИЯ	**MA11001**
1	4
2	45
3	420
4	1
5	0,3
6	-6
7	30
8	-1
9	38
10	-25
11	25
12	6480
13	50
14	-1