Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

Вариант МА11003

15

а) Решите уравнение $\cos 2x - 3\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

$a)\quad \cos 2x - 3\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 2, \quad \cos 2x + 3\sin x - 2 = 0, \quad 1 - 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0,$

$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0,$

$\sin x = 1$ *или* $\sin x = \frac{1}{2},$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$ $\qquad x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z.$

б) *Отрезку* $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ *принадлежат корни уравнения* $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}.$

Ответ: *а)* $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z; \quad (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z.$

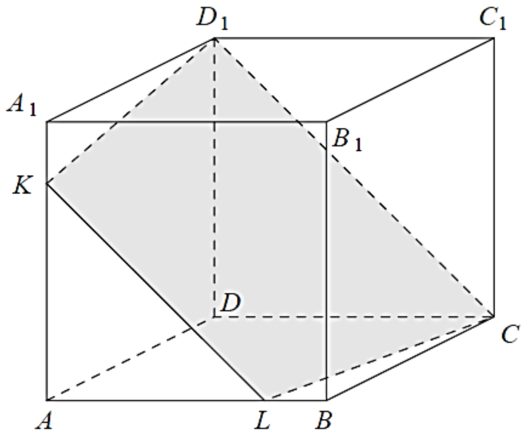
б) $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}.$

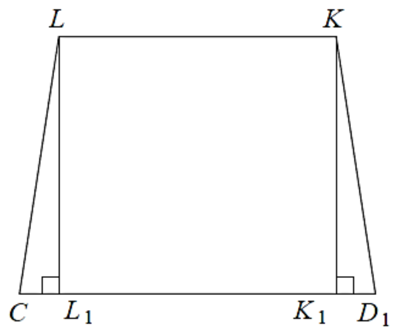
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

16 На ребре AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбрала точка K так, что $KA = 7$ и $KA_1 = 2$. Постройте сечение куба плоскостью CD_1K и найдите его площадь.

Решение.

Ясно, что ребро куба равно 9. Поскольку грани куба ABB_1A_1 и CDD_1C_1 параллельны, плоскость сечения пересекает их по параллельным прямым D_1C и KL, где L лежит на AB. Треугольники D_1DC и KAL подобны, поэтому $AL = AK = 7$ и $LB = KA_1$. Значит, треугольники KA_1D и LBC равны, откуда $KD_1 = LC$. Равнобедренная трапеция $CLKD_1$ – искомое сечение. Найдём её площадь. Основания трапеции равны $CD_1 = 9\sqrt{2}$ и $KL = 7\sqrt{2}$, боковая сторона $CL = D_1K = \sqrt{9^2 + 2^2} = \sqrt{85}$. Проведя высоты $KK_1 = LL_1$ трапеции, найдём $CL_1 = D_1K_1 = \dfrac{CD_1 - LK}{2} = \sqrt{2}$ и $KK_1 = LL_1 = \sqrt{85 - 2} = \sqrt{83}$. Тогда площадь трапеции равна $KK_1 \cdot \dfrac{CD_1 + LK}{2} = \sqrt{83} \cdot 8\sqrt{2} = 8\sqrt{166}$.





Ответ: $8\sqrt{166}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено ИЛИ при правильном ответе решение недостаточно обоснованно.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

17 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{49}}(26-5x)\cdot\log_{6-x}\frac{1}{7}\geq 1.$

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases}26-5x>0,\\6-x>0,\\6-x\neq 1,\end{cases}$$

откуда $x\in(-\infty;\ 5)\cup\left(5;\ \frac{26}{5}\right)$. Для таких x получаем:

$$\frac{\log_{\frac{1}{49}}(26-5x)}{\log_{\frac{1}{7}}(6-x)}=\frac{\log_{\frac{1}{7}}(26-5x)}{2\log_{\frac{1}{7}}(6-x)}=\frac{\log_{\frac{1}{7}}(26-5x)}{\log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2}.$$

Исходное неравенство примет вид: $\dfrac{\log_{\frac{1}{7}}(26-5x)}{\log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2}\geq 1.$

Рассмотрим исходное неравенство при $x\in(-\infty;\ 5)$, тогда $(6-x)^2>1$, откуда $\log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2<0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{7}}(26-5x)\leq\log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2;\ 26-5x\geq 36-12x+x^2;\ (x-2)(x-5)\leq 0;$$

$$2\leq x\leq 5,$$

откуда $x\in[2;\ 5)$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x\in\left(5;\ \frac{26}{5}\right)$, тогда $(6-x)^2<1$, откуда $\log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2>0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{7}}(26-5x)\geq\log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2;\ 26-5x\leq 36-12x+x^2;\ (x-2)(x-5)\geq 0;$$

$$x\leq 2,\ x\geq 5,$$

откуда $x\in\left(5;\ \frac{26}{5}\right)$.

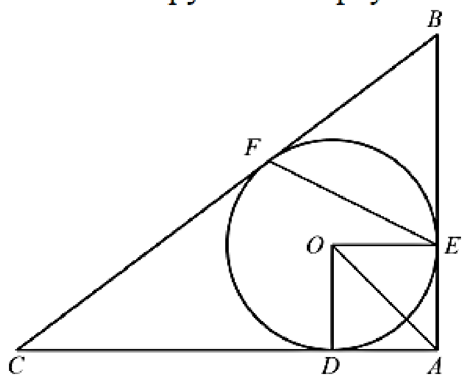
Ответ: $[2;\ 5);\ \left(5;\ \frac{26}{5}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением/исключением точек x = 2, x = 19/9, x = -5, ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

18 В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AC в точке D, причем $AD = R$.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F. Найдите площадь треугольника BEF, если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.

Решение.

а) Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC.



Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит, AO — биссектриса угла BAC. Треугольник AOD прямоугольный и равнобедренный, поэтому $\angle OAD = 45^\circ$. Следовательно, $\angle BAC = 90^\circ$.
б) Обозначим $BF = x$. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, $AE = AD = 5$, $CF = CD = 15$ и $BE = BF = x$. По теореме Пифагора $BC^2 = AC^2 + AB^2$, или $(15+x)^2 = 20^2 + (5+x)^2$. Из этого уравнения находим, что $x = 10$. Тогда

$$BC = 25, \sin\angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta BEF} = \frac{1}{2} BE \cdot BF \sin\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5} = 40.$$

Ответ: 40.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

19 В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на *r*% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Найдите число *r*, если известно, что кредит был полностью погашен за два года, причем в первый год было переведено 55 000 рублей, а во второй год – 69 000 рублей.

Решение.

Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$, *a тыс. рублей* – некоторая сумма, взятая в кредит. По условию долг перед банком (в рублях) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом.

$$a, \quad (ak - 55), \quad ak^2 - 55k - 69 = 0,$$

$$\textit{откуда} \ ak^2 - 55k - 69 = 0.$$

Решая квадратное уравнение с параметром $a > 0$, получаем $k = \frac{55 + \sqrt{3025 + 276a}}{2a}$ или $k = \frac{55 - \sqrt{3025 + 276a}}{2a}$.

Последнее решение не удовлетворяет условию задачи, так как $k < 0$. Значит, $r = \frac{50\left(55 + \sqrt{3025 + 276a}\right)}{a} - 100$.

Ответ: $r = \frac{50\left(55 + \sqrt{3025 + 276a}\right)}{a} - 100$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно.	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

20 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x-a^2+4a-2|+|x-a^2+2a+3|=2a-5$ имеет хотя бы один корень на отрезке [5; 23].

Решение.

Разность выражений, стоящих под знаками модуля, совпадает с правой частью уравнения:

$$(x-a^2+4a-2)-(x-a^2+2a+3)=2a-5.$$

Сделаем замену: $m=x-a^2+4a-2$, $n=x-a^2+2a+3$. Тогда уравнение примет вид:

$$|m|+|n|=m-n.$$

Это равносильно условию $n\le 0\le m$. Получаем:

$$x-a^2+2a+3\le 0\le x-a^2+4a-2;$$

$$a^2-4a+2\le x\le a^2-2a-3.$$

Уравнение имеет хотя бы один корень на отрезке $[5;\ 23]$, только если правая граница отрезка решений не меньше 5, а левая не больше 23. Получаем

$$\begin{cases} a^2-4a+2\le a^2-2a-3, \\ a^2-2a-3\ge 5, \\ a^2-4a+2\le 23; \end{cases} \begin{cases} 2a\ge 5, \\ a^2-2a-8\ge 0, \\ a^2-4a-21\le 0; \end{cases} \begin{cases} a\ge 2{,}5, \\ (a-4)(a+2)\ge 0, \\ (a-7)(a+3)\le 0; \end{cases} \begin{cases} a\ge 2{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} -3\le a\le -2, \\ 4\le a\le 7. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $4\le a\le 7$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений параметра a, но - или отличающееся от искомого конечным числом точек; - или решение недостаточно обосновано.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a.	2
Задача сведена к исследованию двойного неравенства с параметром a.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

21 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 10, 12, 13, 22, 23, 24, 25, 34, 35, 36, 37, 46, 47, 49, 59.

Решение.

а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22-1=21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 10 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{59}{10}$, то есть 5. Кроме того, числа 12 и 13 меньше, чем сумма двух чисел 10, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $59-10-12-13=24$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 10, оставшиеся задуманные числа — это 12 и 12 или 24. Для задуманных чисел 10, 12, 12, 12, 13 и 10, 12, 13, 24 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 1, 1, 1, 1, 1, 1; б) нет; в) 10, 12, 12, 12, 13 или 10, 12, 13, 24.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: - пример в п. *а*; - обоснованное решение в п. *б*; - обоснованная оценка количества задуманных чисел в п. *в*; - оба набора задуманных чисел в п. *в*.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

НОМЕР ЗАДАНИЯ	**МА11003**
1	4
2	7
3	560
4	12
5	0,875
6	1
7	100
8	5
9	3
10	8
11	5
12	32
13	14
14	-21