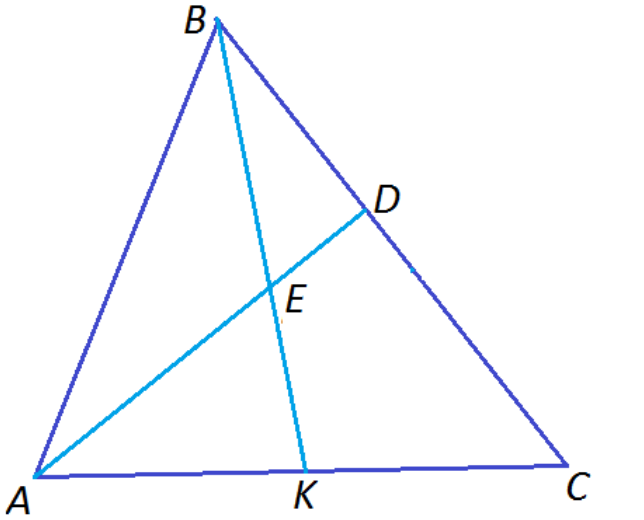
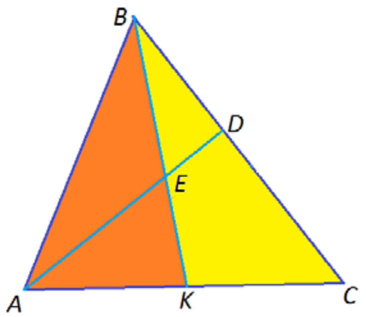
Свойство биссектрисы: биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, отношение длин которых равно отношению сторон, образующих угол.

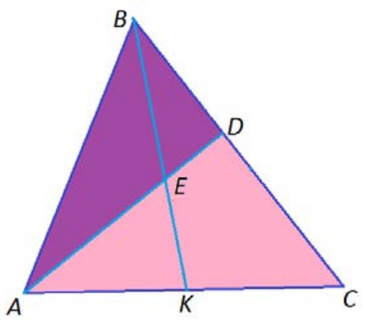
1. Площадь треугольника ABC равна 60. Биссектриса AD пересекает медиану BK в точке E, при этом BD:CD=1:2. Найдите площадь четырехугольника EDCK.



Медиана BK разделит основание AC на два равных отрезка: AK=KC, поэтому площади треугольников ABK и BKC равны: $S_{\Delta}ABK=S_{\Delta}BKC=30$.

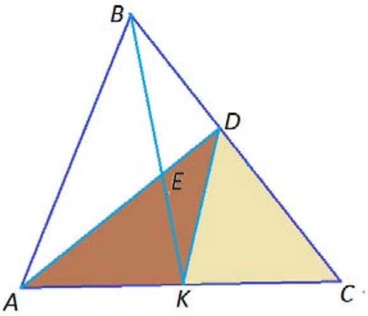


Так как BD:CD=1:2, то площадь треугольника ABD вдвое меньше площади треугольника ADC, ведь высота этих треугольников одинаковая: $2S_{\Delta}ABD=S_{\Delta}ADC$, $S_{\Delta}ABD=20$, $S_{\Delta}ADC=40$.



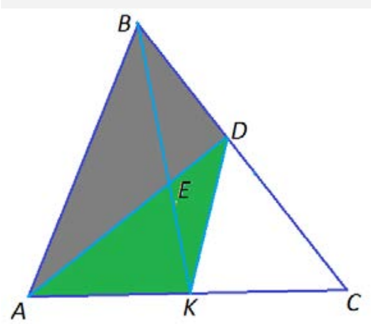
Проведем отрезок KD, рассмотрим треугольники AKD и KDC. Их высоты равны, и равны основания – следовательно, у них одинаковая площадь:

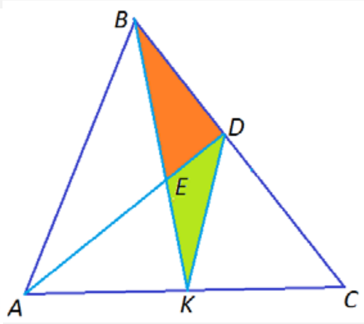
$S_{\Delta}ADK = S_{\Delta}KDC = 20$.



Площадь треугольника BDK равна 10 (можно найти ее как разность площадей треугольников BKC и KDC).

Теперь надо определить площадь треугольника EDK – и дело в шляпе. Заметим, что площади треугольников ABD и ADK равны, а ведь у них общее основание – это отрезок AD.

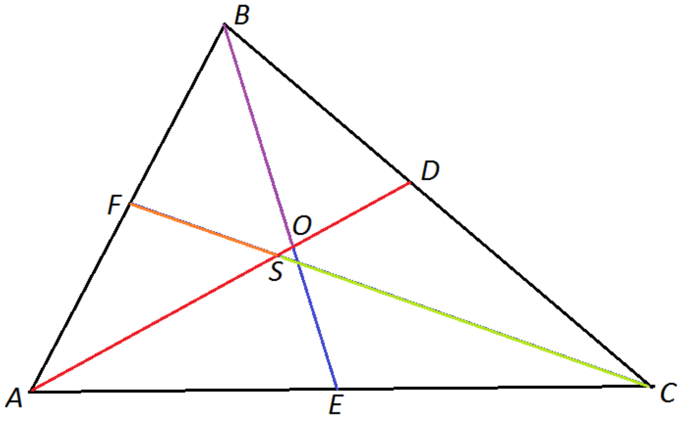




Но тогда равны и их высоты! А высоты этих треугольников являются высотами треугольников EBD и EDK, и получается, что ED – общее основание последних и высоты одинаковые – а значит, площади треугольников EBD и EDK равны, и равны они половине площади треугольника BDK: $S_{\Delta}EBD = S_{\Delta}EDK = 5$, тогда площадь четырехугольника EDCK равна 25: $S_{EDCK} = S_{\Delta}KDC + S_{\Delta}EDK = 20 + 5 = 25$.

Ответ: 25.

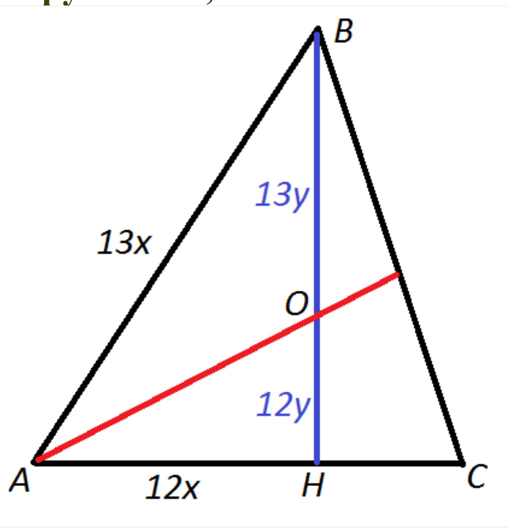
2. Биссектриса угла A треугольника ABC делит медиану, проведенную из вершины B, в отношении 5:4, считая от вершины B. В каком отношении, считая от вершины C, эта биссектриса делит медиану, проведенную из вершины C?



Рассмотрим треугольник ABE. Так как BO:OE=5:4, то, по свойству биссектрисы, стороны относятся также: AB:AE=5:4. Тогда пусть AE=4y, AB=5y. Так как BE – медиана и AE=EC, то AC=8y. CF – также медиана, то есть AF=FB. так как AB=5y, то AF=FB=2,5y. Тогда в треугольнике AFC отношение сторон AF:AC=2,5y:8y=5:16.

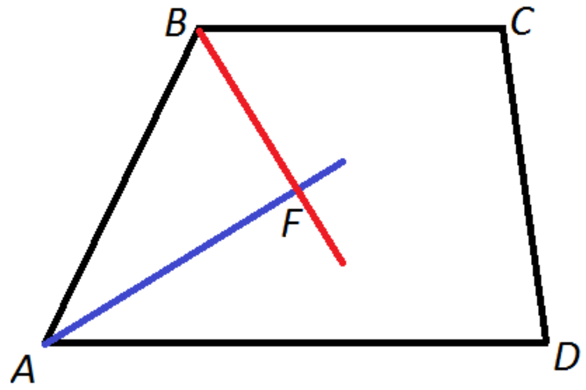
Ответ: FS:SC=5:16

3. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведенную из вершины B в отношении 13:12, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если BC=10.



По свойству биссектрисы, отношение сторон треугольника ABH AB:AH=13:12, тогда можно обозначить AB за 13x, а AH за 12x. Так как треугольник ABH прямоугольный, то, зная катет и гипотенузу, можно найти по теореме Пифагора второй катет: $BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=\sqrt{(13x)^2-(12x)^2}=5x$. Тогда можно просто определить синус угла A: $\sin A=\frac{5x}{13x}=\frac{5}{13}$, а, зная синус, воспользоваться теоремой синусов: $2R=\frac{BC}{\sin A}$, откуда $R=\frac{BC}{2\times\sin A}=\frac{10}{2\times\frac{5}{13}}=13$

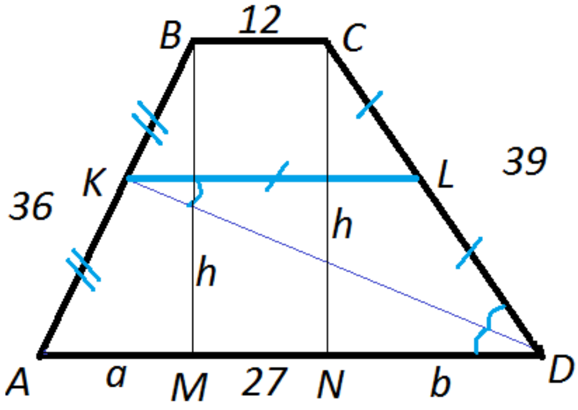
1. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции ABCD пересекаются в точке F. Найдите AB, если $AF=24, BF=10$.



Сумма углов при боковой стороне трапеции, как известно, равна 180°. Каждая из биссектрис разделит свой угол пополам, поэтому сумма углов FBA и BAF будет равна $\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$, и значит, треугольник BAF – прямоугольный, и его гипотенузу AB можно определить по теореме Пифагора: $AB=\sqrt{AF^2+BF^2}=\sqrt{24^2+10^2}=\sqrt{676}=26$

Ответ: 26.

2. Боковые стороны AB и CD трапеции ABCD равны соответственно 36 и 39, а основание BC равно 12. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.



Так как по условию AK=KB=18, то точка K – один из концов средней линии. Проведем среднюю линию трапеции. Тогда L – середина CD, и CL=LD=19,5. Образовался треугольник KLD, который является равнобедренным: биссектриса KD разделит угол ADC пополам, а углы KLD и KAD равны как накрестлежащие. Тогда средняя линия этой трапеции равна 19,5, а это значит, что нижнее основание равно 27 – тогда полусумма оснований будет равна 19,5.

Проведем высоты трапеции. Высоты отсекут от нижнего основания трапеции отрезки AM и ND, которые мы обозначим a и b. Тогда высоту трапеции можно записать для прямоугольного треугольника ABM:

$h^2 = 36^2 - a^2$

Высоту можно записать и в треугольнике CND:

$h^2 = 39^2 - b^2$

Приравняем данные два выражения: $36^2 - a^2 = 39^2 - b^2$

Это выражение можно переписать так: $b^2 - a^2 = 39^2 - 36^2$

А теперь разложим правую и левую части как разность квадратов: $(b+a)(b-a) = (39-36)(39+36)$

Сумму отрезков a и b легко определить как разность оснований трапеции: $a+b = 27-12 = 15$

Подставим данную сумму в предыдущее уравнение: $15(b-a) = 3 \times 75$, или $b-a = 15$.

Составим систему: $\begin{cases} a+b=15 \\ b-a=15 \end{cases}$

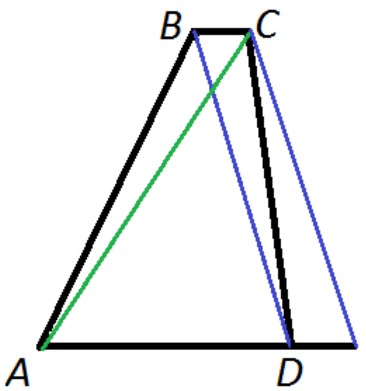
Сложив два уравнения системы, найдем: $2b = 30$, $b = 15$.

Теперь можно найти высоту трапеции и ее площадь: $h^2 = 36^2$, $h = 36$.

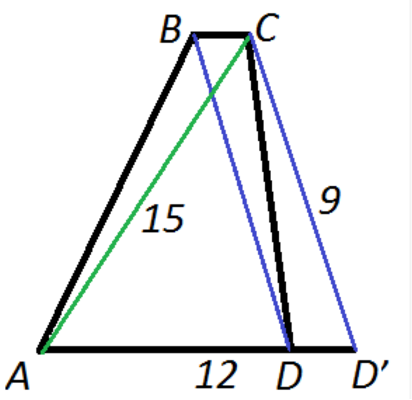
$S = \frac{1}{2}(27+12) \times 36 = 702$.

Ответ: 702.

3. Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 15 и 9, а средняя линия равна 6.



Для того, чтобы решить эту задачу, сделаем "финт ушами": перенесем диагональ BD вправо на длину верхнего основания трапеции BC, образовав таким образом треугольник ACD':



Сторона AC нашего треугольника является диагональю трапеции и равна 15, сторона CD’ – это вторая диагональ, равная 9. Основание треугольника AD’- сумма длин оснований трапеции, а так как нам известна средняя линия, то можно узнать и сумму оснований: $6\times 2=12$. Таким образом, в треугольнике ACD’ мы знаем длины всех его сторон.

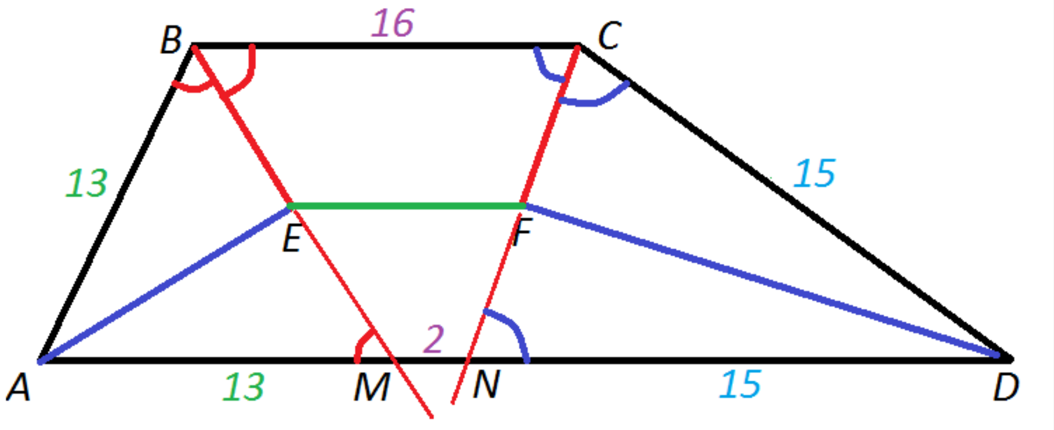
Теперь вернемся к цели задачи: надо определить площадь трапеции. Она равна произведению полусуммы оснований на высоту трапеции. Но площадь треугольника ACD’ равна половине произведения основания на высоту, а высота у него такая же, как и у трапеции, и половина основания – ни что иное, как средняя линия трапеции, или полусумма ее оснований! То есть искомая площадь трапеции и площадь треугольника ACD’ равны. Осталось найти площадь треугольника ACD’, для этого воспользуемся формулой Герона:

$S=\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$. Здесь p – полупериметр, в нашем случае половина периметра равна $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{15+9+12}{2}=18$

Тогда: $S=\sqrt{18\left(18-15\right)\left(18-9\right)\left(18-12\right)}=\sqrt{18\times 3\times 9\times 6}=\sqrt{3^4\times 6^2}=6\times 9=54$

Ответ: 54.

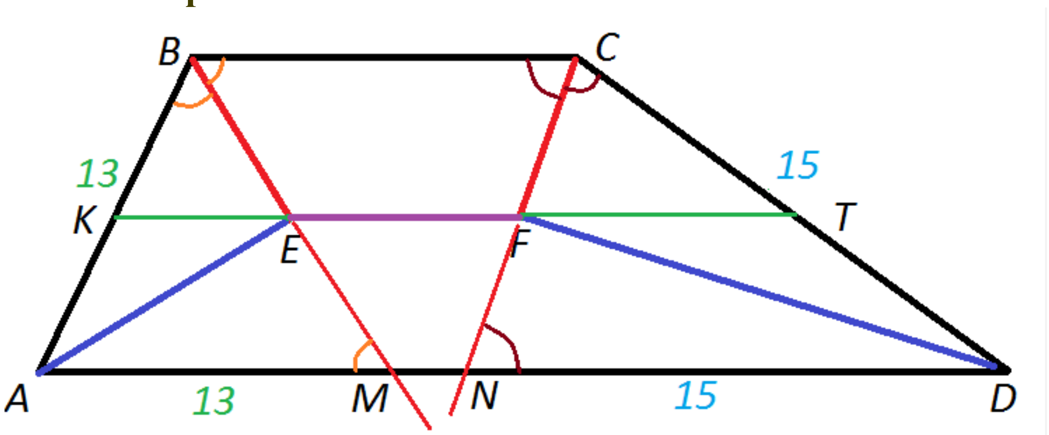
4. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции ABCD пересекаются в точке F. Биссектрисы углов C и D при боковой стороне CD пересекаются в точке G. Найдите FG, если основания равны 16 и 30, боковые стороны 13 и 15.



Как уже было пояснено в задаче 1, треугольники ABF и CDG – прямоугольные, это нам пригодится попозже. А сейчас рассмотрим треугольник ABM. Он равнобедренный, так как угол ABM равен углу MBC по условию, а угол AMB равен углу MBC как накрест лежащий. Аналогично и треугольник CDN также является равнобедренным по тем же соображениям. Тогда AM=AB=13, CD=DN=15, а отрезок $MN = 30 - 13 - 15 = 2$. Так как треугольник ABM равнобедренный, а треугольник ABF – прямоугольный, то отрезок AF является высотой, а также и медианой треугольника ABM и делит его сторону BM пополам: BF=FM. Так же DG является высотой и медианой треугольника CDN, и делит NC пополам: NG=CG. Тогда можно заметить, что FG – средняя линия трапеции BMNC, и тогда она равна полусумме оснований: $FG = \frac{1}{2}\left(BC + MN\right) = \frac{1}{2}\left(16 + 2\right) = 9$

Ответ: 9.

5. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции ABCD пересекаются в точке E. Биссектрисы углов C и D при боковой стороне CD пересекаются в точке F. Найдите EF, если средняя линия равна 21, боковые стороны 13 и 15.

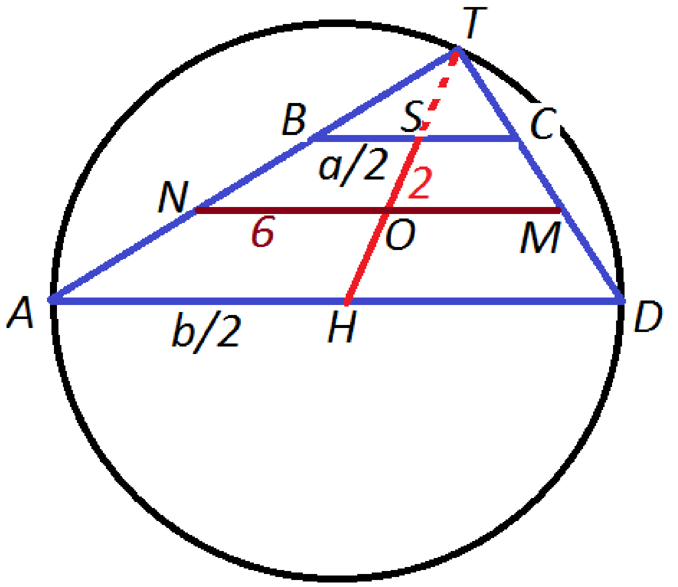


Решение этой задачи похоже на решение предыдущей. Опять биссектрисы отсекут равнобедренные треугольники ABM и CDN: AM=AB=13, CD=DN=15. Так как треугольник ABM равнобедренный, а треугольник ABE – прямоугольный, то отрезок AE является биссектрисой, высотой, а также и медианой треугольника ABM и делит его сторону BM пополам: BE=EM. Так же DG является биссектрисой, высотой и медианой треугольника CDN, и делит NC пополам: NF=CF. Тогда KE – средняя линия треугольника ABM, и равна половине основания: $KE=\frac{1}{2}(AM)=\frac{1}{2}(13)=6,5$, а FT – средняя линия треугольника NCD: $FT=\frac{1}{2}(ND)=\frac{1}{2}(15)=7,5$.

Найдем EF: $EF=KT-KE-ET=21-6,5-7,5=7$

6. Углы при одном из оснований трапеции ABCD равны 53 и 37 градусов, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 6 и 2. Найдите основания трапеции.

Посмотрим на рисунок. Для начала предположим, что средняя линия NM=6, а вторая линия, соединяющая середины оснований HS=2.



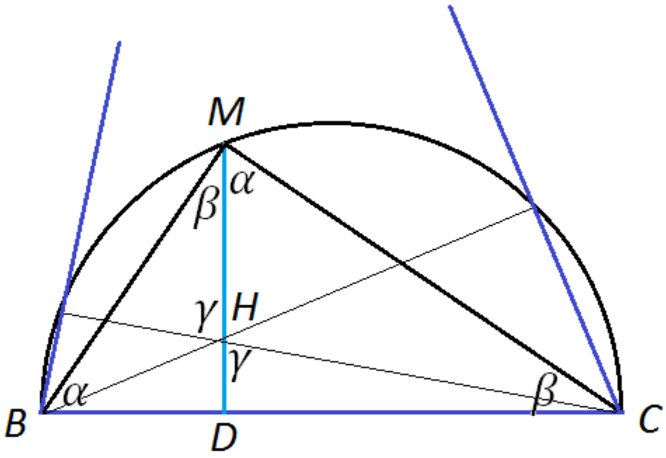
В условии этой задачи самое важное – это сумма углов при основании. Если заметить, что сумма этих углов равна 90 градусам – догадаться, как решается задача, совсем просто. Достроим нашу трапецию до треугольника. Треугольник ATD – прямоугольный (по теореме о сумме углов треугольника). Треугольники ATD, NMT, BTC подобны (по двум углам, так как углы при основаниях этих треугольников – соответственные, а прямые BC, NM, AD – параллельны по условию). Так как треугольник ATD – прямоугольный, то, если описать около него окружность, то ее центр будет лежать на середине гипотенузы AD, в точке H, AD – диаметр этой окружности. Поэтому, если провести медиану к гипотенузе AD из вершины T, то она будет равна радиусу окружности и половине AD: $AH=HD=HT$. Тогда треугольники ATH, NOT, BST – равнобедренные. Кроме того, OT – медиана треугольника NMT и разделит его основание пополам: $NO=OM=OT=3$. Если же OT=3, то $ST=OT-OS=2$. (Отрезок SO равен 1, так как OM – средняя линия трапеции HSCD, и разделит HS пополам). Так как $BS = SC = ST = 2$, то BC=4, и тогда из теоремы о средней линии AD=8.

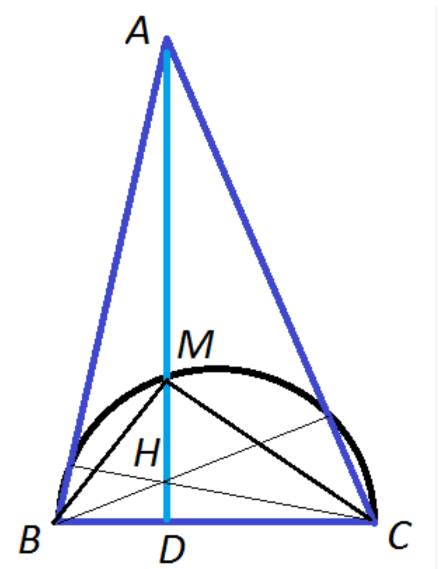
Если немного подумать, то понятно, что ситуация, когда отрезок HS=6, а NM=2 – невозможна.

Ответ: 4, 8.

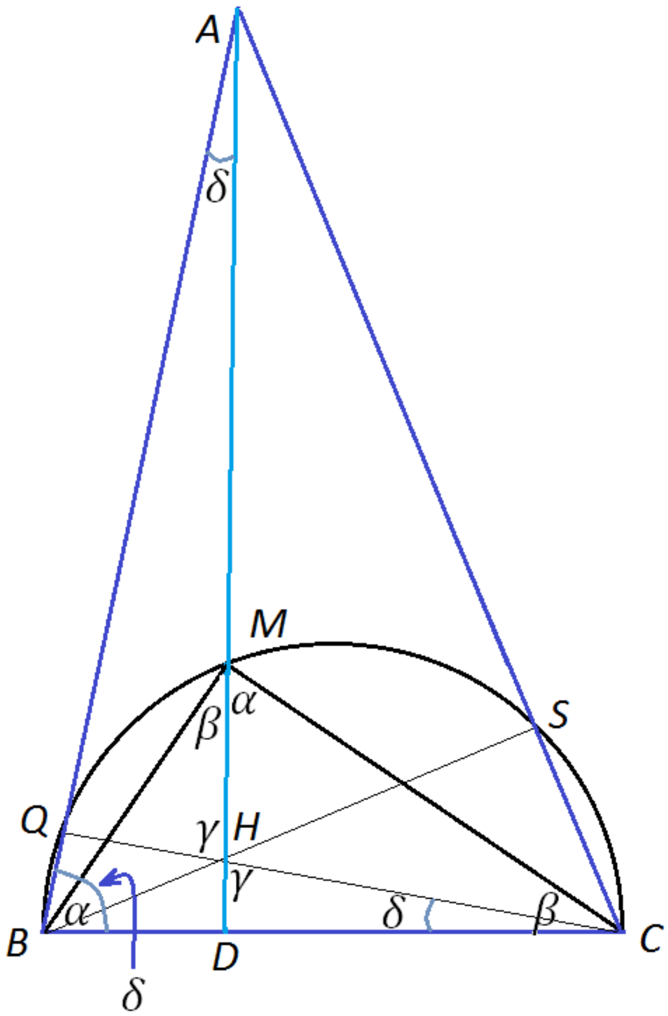
Задачи на подобие – это, без преувеличения, самые сложные задачи в геометрии. И дело не в расчете, а в том, чтобы это подобие увидеть – это и есть самая большая сложность. Попробуем решить пару таких задач, в которых подобие углядеть действительно сложно.

1. На стороне ВС остроугольного треугольника АВС ($AB \neq AC$, Н – точка пересечения высот треугольника АВС. Найдите АН.





Сделаем чертеж. Когда я его делала впервые, я, конечно, провела высоты треугольника – ведь речь шла о точке их пересечения. Высоты соединили вершины треугольника с точками пересечения окружности и сторон треугольника – ведь вписанные углы, опирающиеся на диаметр, равны 90°. Я подумала также и о том, что угол ВМС будет прямым тоже, но рисовать треугольник ВМС не стала – и задача долго не решалась. Да и когда я нарисовала этот треугольник, решение тоже пришло не сразу – не замечалось подобие.



Давайте рассмотрим треугольник BMC поближе. Высота MD делит его на два подобных треугольника: BMD и DMC (подобие по двум углам). Для этих двух треугольников можем записать: $\frac{MD}{BD}=\frac{DC}{MD}$, или $MD^2=BD\times DC$, $BD\times DC=64$.

Теперь наша задача найти еще подобные треугольники, и она отнюдь не простая. Обратим внимание на равенство вертикальных углов γ. Если это заметить, то понятно, что треугольники AQH и DHC подобны, а кроме того, подобны и треугольники AQH и ABD. Тогда для последних можно записать: $\frac{HD}{DC}=\frac{BD}{AD}$, откуда $HD\times AD=DC\times BD=64$. Уже теперь мы можем, наконец, вычислить интересующий нас отрезок: $HD=\frac{64}{32}=2$, $AH=AD-HD=32-2=30$.

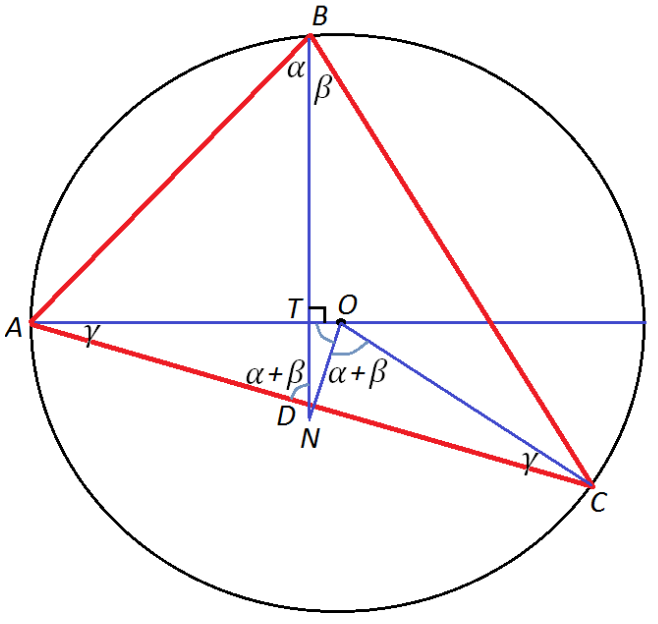
Ответ: 30.

2. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB=40$, $AC=64$, точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD,

перпендикулярная прямой AO, пересекает сторону AC в точке D. Найдите CD.

Тоже совсем непростая задача. Нарисуем чертеж.

Точку пересечения прямых AO и BD обозначим буквой T. Рассмотрим треугольник AOC. Он равнобедренный (его стороны – радиусы окружности), и его угол AOC является центральным углом. Так как центральный угол вдвое больше, чем вписанный, то угол AOC вдвое больше угла B треугольника ABC. Если в треугольнике AOC провести высоту из вершины O, то она также будет являться медианой и биссектрисой, и разделит угол AOC на два равных угла: AON и NOC, каждый из этих углов равен углу B треугольника ABC: $B=\alpha+\beta$, $AON=\alpha+\beta$, $NOC=\alpha+\beta$.

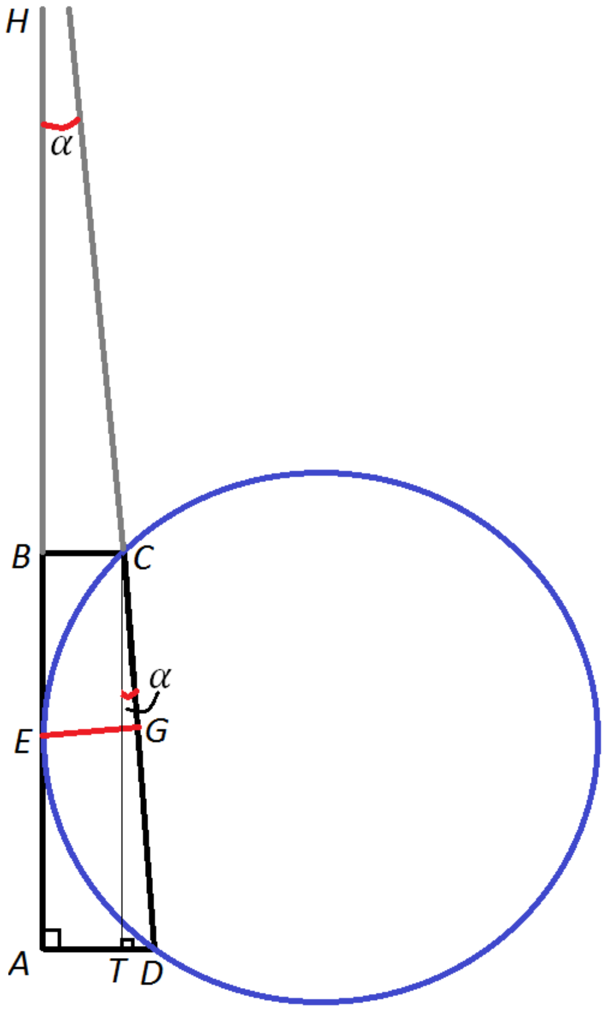


Треугольник AON прямоугольный, обозначим его второй острый угол γ. Тогда в треугольнике AON $\gamma+\alpha+\beta=90^\circ$, или $\alpha+\beta=90^\circ-\gamma$. Тогда в треугольнике ATN, который является прямоугольным по условию, угол $TNA=90^\circ-\gamma=\alpha+\beta$. Это показывает, что треугольник ABD подобен треугольнику ABC по двум углам: равенство двух мы только что доказали, а угол A у них – общий. Для этих подобных треугольников запишем отношение длин их сторон: $\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AB}$, или $AD=\frac{AB^2}{AC}=\frac{40^2}{64}=25$, $DC=AC-AD=64-25=39$.

Ответ: 39.

3. В трапеции ABCD боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если AD=15, BC=12.

Рассмотрим рисунок. Здесь важно, что CD не является диаметром окружности. Найти нужно длину красного отрезка, который перпендикулярен CD. Точка H – пересечение продолжений боковых сторон трапеции, рисовать само продолжение я не стала. Обозначим угол при вершине H треугольника AHD за α



.

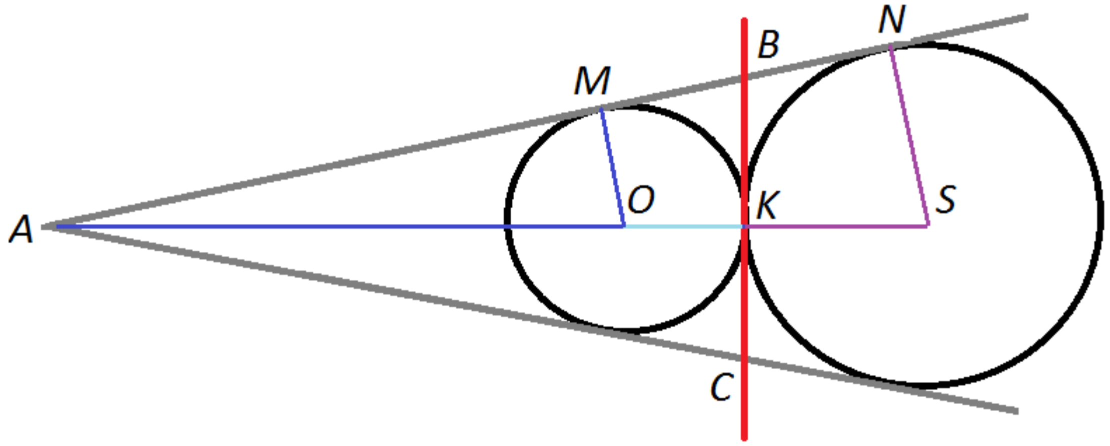
Из точки C опустим высоту CT. Рассмотрим треугольники AHD и CTD. Они подобны по двум углам: оба прямоугольные и угол TCD равен α. Составим для них отношение сторон: $\frac{TD}{AD}=\frac{CD}{HD}$. $TD=AD-BC=15-12=3$, тогда $\frac{3}{15}=\frac{CD}{HD}$, $\frac{CD}{HD}=\frac{1}{5}$. Можем записать: $CD=x, HD=5x, HC=4x$.

Вот он и наступил – момент, когда так нужно заметить НУЖНОЕ подобие! А именно: если присмотреться, то треугольник EGH также подобен треугольникам AHD и TCD, как и треугольнику HBC.Треугольник EGH также прямоугольный и при вершине H имеет общий угол с треугольником AHD. Тогда для треугольников отношение сторон: $\frac{HE}{HD}=\frac{HC}{HE}$, $HE^2=HC\times HD=4x\times 5x=20x^2$, откуда $HE=2x\times\sqrt{5}$. Для треугольников HBC и EGH отношение сторон: $\frac{BC}{HC}=\frac{EG}{HE}$, $EG=\frac{BC\times HE}{HC}=\frac{12\times 2x\times\sqrt{5}}{4}x=6\sqrt{5}$.

Ответ: $EG=6\sqrt{5}$.

1. Две касающиеся внешним образом в точке К окружности, радиусы которых равны 22 и 33, касаются сторон угла с вершиной А. Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку К, пересекает стороны угла в точках В и С. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника АВС.

Нарисуем чертеж:



Вспоминаем, что радиус окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной. Именно поэтому отрезки ОК и KS лежат на одной прямой, а углы BNS и BMO – прямые. Тогда треугольник АМО подобен треугольнику ANS (по двум углам). Обозначим отрезок АО за х. Тогда можно составить пропорцию для этих двух треугольников: $NS:MO=AS:AO$, или $\frac{33}{22}=\frac{(55+x)}{x}$. Из этой пропорции найдем х: $\frac{3}{2}=\frac{(55+x)}{x}$, $3x=2(55+x)$. Отсюда $x=AO=110$. Теперь в треугольнике АМО известна гипотенуза и один катет, поэт ому можем определить синус угла МАО: $\sin MAO=\frac{MO}{AO}=\frac{22}{110}=0,2$. Зная синус, определим косинус угла МАО: $\cos MAO=\sqrt{1\text{-}(\sin MAO)^2}=\sqrt{1-0,04}=\frac{2\times\sqrt{6}}{5}$. Если же известны синус и косинус угла, то можно найти синус двойного угла (синус угла ВАС): $2\times\sin MAO\times\cos MAO=\sin BAC=\frac{2\times0,2\times2\times\sqrt{6}}{5}=\frac{4\times\sqrt{6}}{25}$. Найти радиус описанной окружности легко по теореме синусов, если узнать длину стороны ВС треугольника АВС (или длину отрезка ВК, и потом умножить ее на 2). Треугольник АВК подобен треугольнику АМО по двум углам, и подобен треугольнику ANS (треугольник АВС прямоугольный, так как АК – высота, медиана и биссектриса равнобедренного треугольника АВС. Составим пропорцию для подобных треугольников АВК и АМО: $BK:MO=AK:AM$,

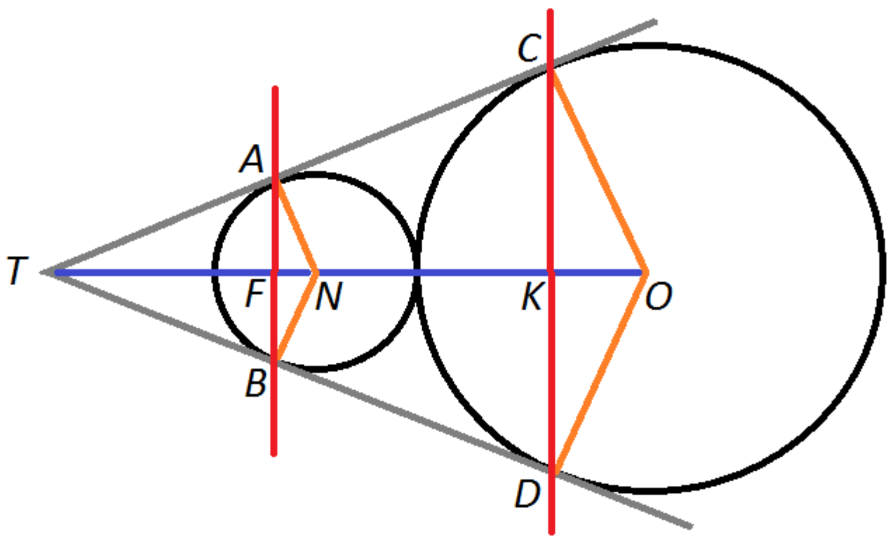
или $\frac{BK}{22}=\frac{132}{\sqrt{110^2-22^2}}$ – вычисляем АМ по теореме Пифагора.

Тогда $BK=\frac{132\times 22}{44\sqrt{6}}=11\sqrt{6}$, $BC=22\sqrt{6}$. Наконец дошло дело и до теоремы синусов: $\frac{BC}{\sin BAC}=2R$, $R=\frac{BC}{2\times\sin BAC}=\frac{\frac{22\times\sqrt{6}}{2}\times 25}{4\times\sqrt{6}}=\frac{275}{4}=68,75$.

Ответ: 68,75

2. Окружности радиусов 12 и 52 касаются внешним образом. Точки А и В лежат на первой окружности, точки С и D – на второй. При этом АС и BD – общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми АВ и CD.

Задача похожа на предыдущую. Искомое расстояние FK можно найти, определив длины отрезков FN и KO. Тогда $FK=NO+FN-KO$.



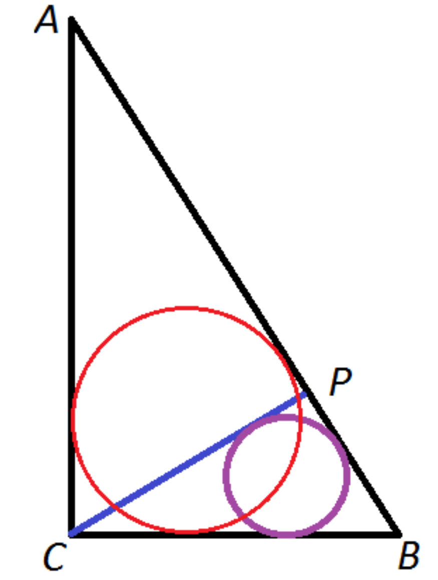
Треугольники ТАВ и ТCD – равнобедренные (по свойствам секущих, проведенных из одной точки). Треугольники TAN и TCO – прямоугольные и подобны по двум углам. Составляем для них пропорцию: $CO:AN=TO:TN$,

или, если обозначить TN за х, то $\frac{52}{12}=\frac{(64+x)}{x}$. Тогда $TN=x=19,2$

. Треугольники TAN и FAN подобны (по двум углам), угол FAN равен углу ATN, тогда равны и их синусы. Треугольник FAN подобен также треугольнику KOC. Тогда $\frac{AN}{TN}=\frac{FN}{AN}=\frac{KO}{OC}$, или $\frac{12}{19,2}=\frac{FN}{12}=\frac{KO}{52}$. Из этой пропорции находим $FN=7,5$, $KO=32,5$. Окончательно находим $FK=NO+FN-KO=(12+52)+7,5-32,5=64-25=39$.

Ответ: 39.

3. Из вершины прямого угла С треугольника ABC проведена высота CP. Радиус окружности, вписанной в треугольник BCP, равен 96, тангенс угла BAC равен 8/15. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.



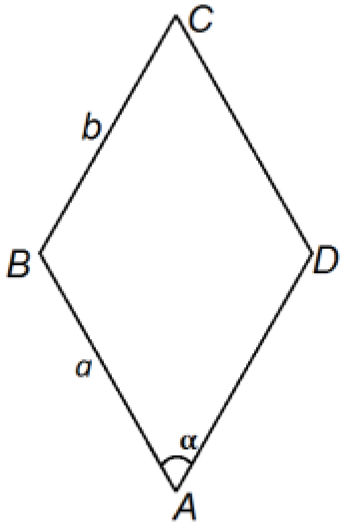
Известный тангенс угла дает отношение сторон треугольника BCP. Их, например, можно обозначить: $PB=8x; PC=15x$. Тогда по теореме Пифагора $CB=\sqrt{(8x)^2+(15x)^2}=17x$. Далее нам даже необязательно знать длины сторон – хотя в этой задаче их можно найти, зная радиус вписанной окружности и воспользовавшись формулой Герона. Нам понадобятся не длины сторон, а их отношение, то есть коэффициент подобия треугольников ABC и BCP. Он равен 17:8. Тогда $\frac{r_{ABC}}{r_{BCP}}=\frac{17}{8}$, или $r_{ABC}=\frac{17}{8}\times r_{BCP}=96\times\frac{17}{8}=204$.

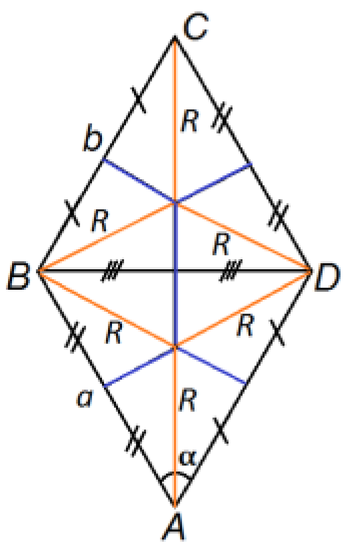
Ответ: 204.

Задача про описанные окружности

В параллелограмме известны две стороны (AB=a, BC=b) и угол ∠BAD=α. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB

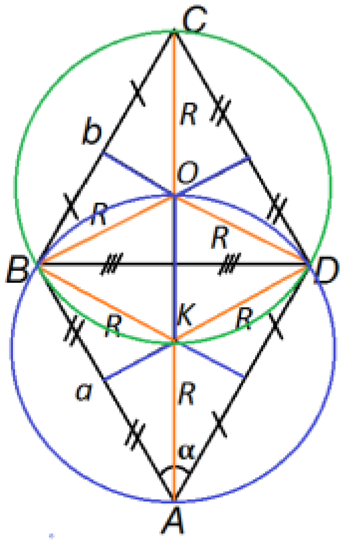
Заметим, что треугольники, вокруг которых описаны окружности – равные по двум сторонам и углу между ними, а значит, вокруг них описаны окружности одного радиуса.





Известно, что центр описанной окружности – это точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Особо отметим, что, поскольку треугольники имеют общую сторону BD, то перпендикуляры к этой стороне лежат на одной прямой и также равны. Итак, отметим центры наших окружностей (синим отмечены серединные перпендикуляры, рыжим – радиусы описанных окружностей, проведенные:к вершинам треугольников):

Теперь можно провести и сами окружности:



Обратим внимание на треугольники BOD и BKD: они равны по трем сторонам, значит, их высоты равны и фигура BODK – ромб (равны все стороны, диагонали точкой пересечения делятся пополам и перпендикулярны). Найдем диагональ параллелограмма BD по теореме синусов из треугольника BAD: $\frac{BD}{sin\alpha} = 2R$

Теперь можно найти высоту треугольника BOD, например, по теореме Пифагора:

$$h^2 = R^2 - \left(\frac{1}{2}BD\right)^2$$

$$h^2 = R^2 - (Rsin\alpha)^2$$

$$h = Rcos\alpha$$

$$OK = 2Rcos\alpha$$

Искомое расстояние OK – удвоенная высота.Осталось определить радиус описанной окружности, для этого определим BD по теореме косинусов:

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\alpha$$

$$4R^2(sin\alpha)^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\alpha$$

Выразим радиус:

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2abcos\alpha}}{2sin\alpha}$$

И, наконец, искомое расстояние:

$$OK = ctg\alpha\sqrt{a^2 + b^2 - 2abcos\alpha}$$