Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

Вариант МА11002

13

а) Решите уравнение $\dfrac{13\sin^2 x - 5\sin x}{13\cos x + 12} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

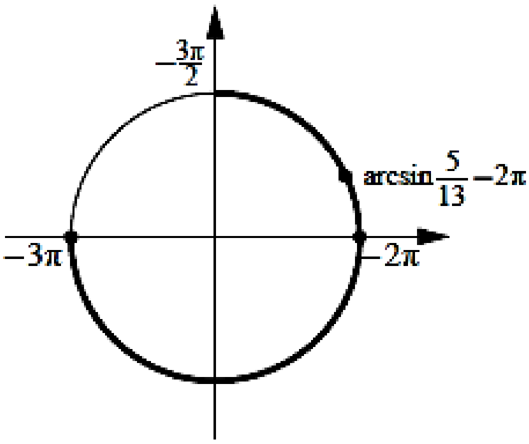
Решение.

а) Имеем

$$\frac{13\sin^2 x - 5\sin x}{13\cos x + 12} = 0; \quad \frac{\sin x\left(\sin x - \frac{5}{13}\right)}{\cos x + \frac{12}{13}} = 0; \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{5}{13}, \\ \sin x = 0, \end{array}\right. \\ \cos x \neq -\frac{12}{13}, \end{cases}$$

откуда $x = \arcsin\dfrac{5}{13} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем -3π; -2π; $\arcsin\dfrac{5}{13} - 2\pi$.

Ответ: а) $\arcsin\dfrac{5}{13} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; πn, $n \in \mathbb{Z}$; б) -3π; -2π; $\arcsin\dfrac{5}{13} - 2\pi$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

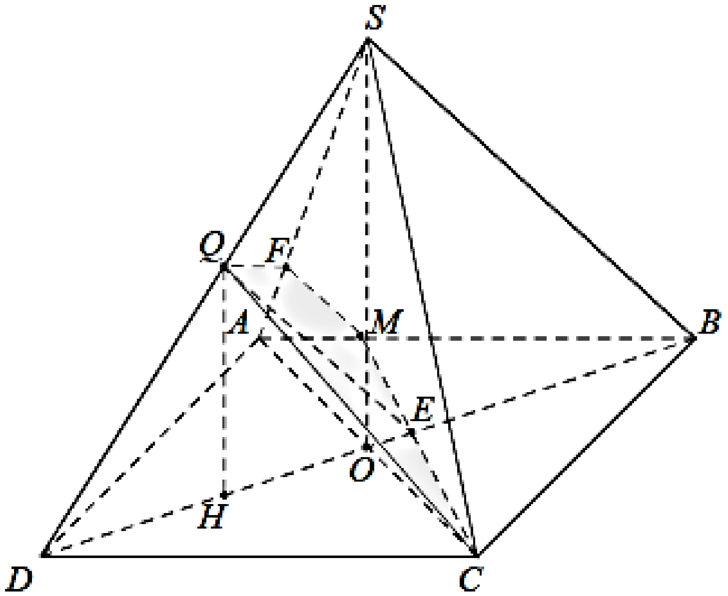
14 В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 5$ и диагональю $BD = 9$. Все боковые рёбра пирамиды равны 5. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E, а на ребре AS — точка F так, что $SF = BE = 4$.

а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB.

б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q. Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC.

Решение.

а) Имеем $DE = 9 - BE = 5$. Пусть прямая CE пересекает ребро AB в точке M. Треугольники BME и DCE подобны, поэтому $\frac{BM}{DC} = \frac{BE}{DE} = \frac{4}{5}$, откуда $BM = 4$. Тогда $AM = 1$. Треугольники ABS и AMF подобны, значит, $FM \parallel SB$. Поэтому прямая SB параллельна плоскости CEF.



б) Из доказанного в предыдущем пункте следует, что $QE \parallel SB$. Тогда $\frac{DQ}{QS} = \frac{DE}{EB} = \frac{5}{4}$. Пусть O — центр основания $ABCD$. Так как все боковые рёбра пирамиды равны, SO — высота пирамиды. Имеем

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{25 - \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{19}}{2}.$$

Плоскость SDB перпендикулярна плоскости основания, и проекция H точки Q на плоскость основания лежит на отрезке DO. Из подобия треугольников DQH и DSO находим $QH = \frac{5}{9} \cdot SO = \frac{5\sqrt{19}}{18}$.

Ответ: $\frac{5\sqrt{19}}{18}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $2^{|x|}-6-\dfrac{9\cdot 2^{|x|}-37}{4^{|x|}-7\cdot 2^{|x|}+12}\le\dfrac{1}{2^{|x|}-4}$.

Решение.

Сделаем замену $y=2^{|x|}$.

Получим

$$y-6-\frac{9y-37}{y^2-7y+12}\le\frac{1}{y-4};$$

$$y-6-\frac{9y-37+y-3}{(y-3)(y-4)}\le 0;$$

$$y-6-10\frac{y-4}{(y-3)(y-4)}\le 0;$$

$$\frac{(y-8)(y-1)(y-4)}{(y-3)(y-4)}\le 0;$$

$-\infty<y\le 1$; $3<y<4$; $4<y\le 8$.

После обратной замены получаем $-3\le x<-2$; $-2<x<-\log_2 3$; $x=0$; $\log_2 3<x<2$; $2<x\le 3$.

Ответ: $[-3;-2)$; $(-2;-\log_2 3)$; $\{0\}$; $(\log_2 3;2)$; $(2;3]$.

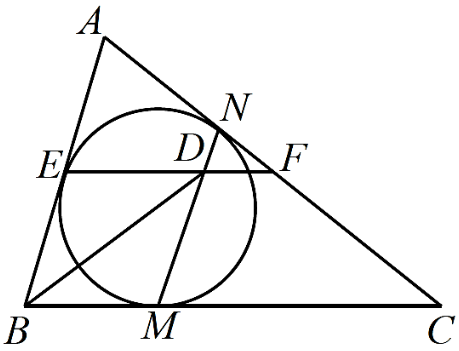
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC и AC в точках M и N соответственно, E и F — середины сторон AB и AC соответственно. Прямые MN и EF пересекаются в точке D.

а) Докажите, что треугольник DFN равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника BED, если $AB = 28$ и $\angle ABC = 60°$.

Решение.



а) Поскольку $CM = CN$, треугольник MCN равнобедренный. Прямые EF и BC параллельны, поэтому треугольник DFN подобен треугольнику MCN, следовательно, треугольник DFN также равнобедренный: $DF = NF$.

б) Обозначим $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Пусть p — полупериметр треугольника ABC. Предположим, что $a > c$. Тогда

$$BE = \frac{c}{2}, \quad CF = \frac{b}{2}, \quad CM = CN = p - c = \frac{a+b-c}{2},$$

$$FD = FN = CN - CF = \frac{a+b-c}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-c}{2}.$$

Значит, $ED = EF - FD = \frac{a}{2} - \frac{a-c}{2} = \frac{c}{2} = EB$, то есть треугольник BED равнобедренный.

Аналогично для $a \le c$.

Поскольку прямые ED и BC параллельны,

$$\angle BED = 180° - \angle ABC = 180° - 60° = 120°.$$

Следовательно, $S_{BED} = \frac{1}{2} BE \cdot ED \cdot \sin 120° = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 14 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 49\sqrt{3}$.

Ответ: $49\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15 января планируется взять кредит в банке на 15 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в восьмой месяц кредитования нужно выплатить 29 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

__Решение.__

Пусть сумма кредита равна S. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$S;\ \frac{14S}{15};\ \ldots;\ \frac{2S}{15};\ \frac{S}{15};\ 0.$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 4 %, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$1{,}04S;\ 1{,}04\cdot\frac{14S}{15};\ \ldots;\ 1{,}04\cdot\frac{2S}{15};\ 1{,}04\cdot\frac{S}{15}.$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$\frac{15\cdot 0{,}04S+S}{15};\ \frac{14\cdot 0{,}04S+S}{15};\ \ldots;\ \frac{2\cdot 0{,}04S+S}{15};\ \frac{0{,}04S+S}{15}.$

В восьмой месяц выплата составит $\frac{8\cdot 0{,}04\cdot S+S}{15}=\frac{1{,}32S}{15}$. А всего следует выплатить

$$S+S\cdot 0{,}04\left(1+\frac{14}{15}+\ldots+\frac{2}{15}+\frac{1}{15}\right)=S\left(1+\frac{16\cdot 0{,}04}{2}\right)=1{,}32S.$$

Значит, банку нужно вернуть $29\,000\cdot 15=435\,000$ рублей.

Ответ: 435 000 рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра α из интервала $(0;\ \pi)$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2-4(x+y)\sin\alpha+8\sin^2\alpha=2\sin\alpha-1, \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2\sin\alpha+4\sin^2\alpha \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Обозначим $a=\sin\alpha$. Получим систему

$$\begin{cases} x^2+y^2-4a(x+y)+8a^2=2a-1, \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=2a+4a^2. \end{cases}$$

Если пара $(x;\ y)$ — решение системы, то пара $(y;\ x)$ тоже решение. Следовательно, единственное решение может иметь вид $(x;\ x)$, где $x\neq 0$.

Пусть $(x;\ x)$, где $x\neq 0$, — решение системы. Тогда

$$\begin{cases} x^2+x^2-4a(x+x)+8a^2=2a-1, \\ \dfrac{x}{x}+\dfrac{x}{x}=2a+4a^2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2(x-2a)^2=2a-1, \\ (2a-1)(a+1)=0. \end{cases}$$

Отсюда видим, что если $a=-1$, то система решений не имеет, а при $a=\dfrac{1}{2}$ система имеет единственное решение.

Решим уравнение $\dfrac{1}{2}=\sin\alpha,\quad 0<\alpha<\pi$. Получим $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ и $\alpha=\dfrac{5\pi}{6}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{6}$ и $\dfrac{5\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	3
С помощью верного рассуждения получены не все значения α	2
Задача верно сведена к решению системы двух уравнений с одной неизвестной	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Восемь экспертов оценивали фильм. Каждый из них выставил оценку — целое число баллов от 0 до 12 включительно. Все эксперты выставили различные оценки. Старый рейтинг фильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. Новый рейтинг фильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки, и подсчитывается среднее арифметическое шести оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{20}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{24}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности старого и нового рейтингов.

Решение.

Обозначим рейтинг кинофильма, вычисленный по старой системе оценивания, через A, а рейтинг кинофильма, вычисленный по новой системе оценивания, через B.

а) Заметим, что $A=\frac{m}{8}$, $B=\frac{n}{6}$, где m и n — некоторые натуральные числа. Значит, $A-B=\frac{m}{8}-\frac{n}{6}=\frac{3m-4n}{24}$. Если $A-B=\frac{1}{20}$, то $3m-4n=\frac{24}{20}$, что невозможно. Таким образом, разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, не может равняться $\frac{1}{20}$.

б) Например, для оценок экспертов 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равна

$$\frac{0+1+2+3+4+6+7+8}{8}-\frac{1+2+3+4+6+7}{6}=\frac{31}{8}-\frac{23}{6}=\frac{1}{24}.$$

в) Пусть x — наименьшая из оценок, z — наибольшая, а y — сумма остальных шести оценок. Тогда

$$A-B=\frac{x+y+z}{8}-\frac{y}{6}=\frac{3x-y+3z}{24}\le$$

$$\le\frac{3x+3z-\left((x+1)+(x+2)+\ldots+(x+6)\right)}{24}=$$

$$=\frac{3z-3x-21}{24}\le\frac{3\cdot10-3\cdot0-21}{24}=\frac{3}{8}.$$

Для оценок экспертов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10 разность $A-B$ равна $\frac{3}{8}$. Значит, наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равно $\frac{3}{8}$.

Ответ: а) нет; б) да, например, для оценок 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8; в) $\frac{3}{8}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *б* и *в* либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4