Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

Вариант МА11003

13

а) Решите уравнение $\frac{5\sin^2 x-3\sin x}{5\cos x+4}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

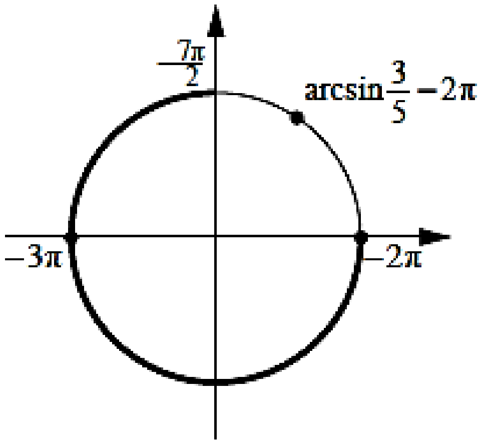
Решение.

а) Имеем

$$\frac{5\sin^2 x-3\sin x}{5\cos x+4}=0;\quad \frac{\sin x\left(\sin x-\frac{3}{5}\right)}{\cos x+\frac{4}{5}}=0;\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{3}{5},\\ \sin x=0,\end{array}\right.\\ \cos x\neq-\frac{4}{5},\end{cases}$$

откуда $x=\arcsin\frac{3}{5}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ или $x=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем -3π; -2π.

Ответ: а) $\arcsin\frac{3}{5}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; πn, $n\in\mathbb{Z}$; б) -3π; -2π.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

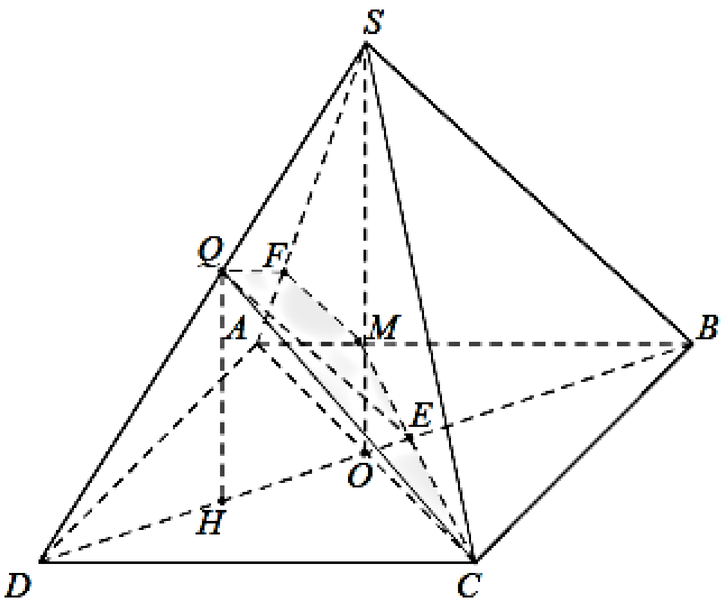
14 В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 4$ и диагональю $BD = 7$. Все боковые рёбра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E, а на ребре AS — точка F так, что $SF = BE = 3$.

а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB.

б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q. Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC.

Решение.

а) Имеем $DE = 7 - BE = 4$. Пусть прямая CE пересекает ребро AB в точке M. Треугольники BME и DCE подобны, поэтому $\frac{BM}{DC} = \frac{BE}{DE} = \frac{3}{4}$, откуда $BM = 3$. Тогда $AM = 1$. Треугольники ABS и AMF подобны, значит, $FM \parallel SB$. Поэтому прямая SB параллельна плоскости CEF.



б) Из доказанного в предыдущем пункте следует, что $QE \parallel SB$. Тогда $\frac{DQ}{QS} = \frac{DE}{EB} = \frac{4}{3}$. Пусть O — центр основания $ABCD$. Так как все боковые рёбра пирамиды равны, SO — высота пирамиды. Имеем

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{16 - \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Плоскость SDB перпендикулярна плоскости основания, и проекция H точки Q на плоскость основания лежит на отрезке DO. Из подобия треугольников DQH и DSO находим $QH = \frac{4}{7} \cdot SO = \frac{2\sqrt{15}}{7}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{15}}{7}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $3^{|x|}-8-\dfrac{3^{|x|}+9}{9^{|x|}-4\cdot 3^{|x|}+3}\le\dfrac{5}{3^{|x|}-1}$.

Решение.

Сделаем замену $y=3^{|x|}$.

Получим

$$y-8-\frac{y+9}{y^2-4y+3}\le\frac{5}{y-1};$$

$$y-8-\frac{y+9+5y-15}{(y-1)(y-3)}\le 0;$$

$$y-8-6\frac{y-1}{(y-1)(y-3)}\le 0;$$

$$\frac{(y-9)(y-2)(y-1)}{(y-3)(y-1)}\le 0.$$

$-\infty<y<1;\ 1<y\le 2;\ 3<y\le 9.$

После обратной замены получаем $-2\le x<-1$; $-\log_3 2\le x<0$; $0<x\le\log_3 2$; $1<x\le 2$.

Ответ: $[-2;-1)$; $[-\log_3 2;0)$; $(0;\log_3 2]$; $(1;2]$.

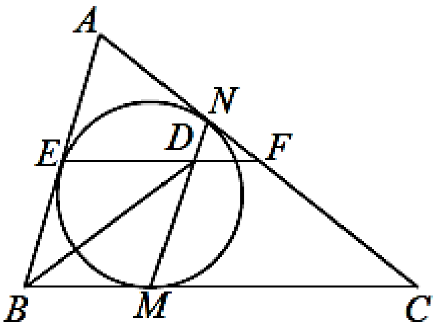
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC и AC в точках M и N соответственно, E и F — середины сторон AB и AC соответственно. Прямые MN и EF пересекаются в точке D.

а) Докажите, что треугольник DFN равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника BED, если $AB = 20$ и $\angle ABC = 60°$.

Решение.



а) Поскольку $CM = CN$, треугольник MCN равнобедренный. Прямые EF и BC параллельны, поэтому треугольник DFN подобен треугольнику MCN, следовательно, треугольник DFN также равнобедренный: $DF = NF$.

б) Обозначим $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Пусть p — полупериметр треугольника ABC. Предположим, что $a > c$. Тогда

$$BE = \frac{c}{2}, \quad CF = \frac{b}{2}, \quad CM = CN = p - c = \frac{a+b-c}{2},$$

$$FD = FN = CN - CF = \frac{a+b-c}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-c}{2}.$$

Значит, $ED = EF - FD = \frac{a}{2} - \frac{a-c}{2} = \frac{c}{2} = EB$, то есть треугольник BED равнобедренный.

Аналогично для $a \le c$.

Поскольку прямые ED и BC параллельны,

$$\angle BED = 180° - \angle ABC = 180° - 60° = 120°.$$

Следовательно, $S_{BED} = \frac{1}{2} BE \cdot ED \cdot \sin 120° = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$.

Ответ: $25\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15 января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в пятый месяц кредитования нужно выплатить 44 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S;\ \frac{8S}{9};\ \ldots;\ \frac{2S}{9};\ \frac{S}{9};\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 4 %, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$$1{,}04S;\ 1{,}04\cdot\frac{8S}{9};\ \ldots;\ 1{,}04\cdot\frac{2S}{9};\ 1{,}04\cdot\frac{S}{9}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$\frac{9\cdot 0{,}04S+S}{9};\ \frac{8\cdot 0{,}04S+S}{9};\ \ldots;\ \frac{2\cdot 0{,}04S+S}{9};\ \frac{0{,}04S+S}{9}.$$

В пятый месяц выплата составит $\frac{5\cdot 0{,}04\cdot S+S}{9}=\frac{1{,}2S}{9}$. А всего следует выплатить

$$S+S\cdot 0{,}04\left(1+\frac{8}{9}+\ldots+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\right)=S\left(1+\frac{10\cdot 0{,}04}{2}\right)=1{,}2S.$$

Значит, банку нужно вернуть $44\,000\cdot 9=396\,000$ рублей.

Ответ: 396 000 рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

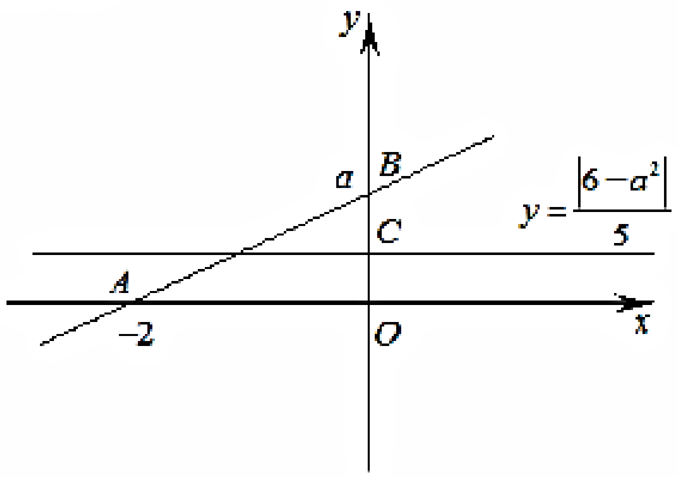
18 Найдите все неотрицательные значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-a)^2}=\sqrt{4+a^2},\\ 5y=\left|6-a^2\right|\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первому уравнению системы удовлетворяют те и только те точки $(x; y)$, которые лежат на отрезке AB прямой, соединяющей точки $A\ (-2; 0)$ и $B\ (0; a)$, где $a \geq 0$, поскольку уравнение задаёт множество точек $(x; y)$, сумма расстояний от каждой из которых до точек A и B равна $\sqrt{4+a^2}$, что равно длине отрезка AB.



Второму уравнению системы удовлетворяют те и только те точки $(x; y)$, которые лежат на прямой $y=\dfrac{\left|6-a^2\right|}{5}$, параллельной оси абсцисс и проходящей через точку $C\left(0;\ \dfrac{\left|6-a^2\right|}{5}\right)$.

Отсюда следует, что условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда точка C лежит между точками O и B, причём если точка C совпадает с точкой A или с точкой B, то условие задачи выполнено.

Решим неравенство $0 \leq \dfrac{\left|6-a^2\right|}{5} \leq a$. Имеем

$$0 \leq \frac{\left|6-a^2\right|}{5} \leq a; \quad \left|6-a^2\right| \leq 5a; \quad \begin{cases}6-a^2 \leq 5a,\\ 6-a^2 \geq -5a;\end{cases}$$

Решим неравенство $0 \le \frac{|6-a^2|}{5} \le a$. Имеем

$$0 \le \frac{|6-a^2|}{5} \le a; \quad |6-a^2| \le 5a; \quad \begin{cases} 6-a^2 \le 5a, \\ 6-a^2 \ge -5a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-1)(a+6) \ge 0, \\ (a+1)(a-6) \le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \ge 1, \\ a \le 6; \end{cases} \quad 1 \le a \le 6.$$

Ответ: $1 \le a \le 6$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но некоторые граничные точки включены/исключены неверно	3
С помощью верного рассуждения получены не все значения a	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямой и отрезка (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Шесть экспертов оценивали фильм. Каждый из них выставил оценку — целое число баллов от 0 до 10 включительно. Все эксперты выставили различные оценки. Старый рейтинг фильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. Новый рейтинг фильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое четырёх оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{18}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{12}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности старого и нового рейтингов.

Решение.

Обозначим рейтинг кинофильма, вычисленный по старой системе оценивания, через A, а рейтинг кинофильма, вычисленный по новой системе оценивания, через B.

а) Заметим, что $A = \frac{m}{6}$, $B = \frac{n}{4}$, где m и n — некоторые натуральные числа.

Значит, $A-B=\frac{m}{6}-\frac{n}{4}=\frac{2m-3n}{12}$. Если $A-B=\frac{1}{18}$, то $2m-3n=\frac{12}{18}$, что невозможно. Таким образом, разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, не может равняться $\frac{1}{18}$.

б) Например, для оценок экспертов 0, 1, 2, 3, 5, 6 разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равна

$\frac{0+1+2+3+5+6}{6}-\frac{1+2+3+5}{4}=\frac{17}{6}-\frac{11}{4}=\frac{1}{12}$.

в) Пусть x — наименьшая из оценок, z — наибольшая, а y — сумма остальных четырёх оценок. Тогда

$$A-B=\frac{x+y+z}{6}-\frac{y}{4}=\frac{2x-y+2z}{12}\le$$

$$\le\frac{2x+2z-\left(\left(x+1\right)+\left(x+2\right)+\left(x+3\right)+\left(x+4\right)\right)}{12}=$$

$$=\frac{2z-2x-10}{12}\le\frac{2\cdot 10-2\cdot 0-10}{12}=\frac{5}{6}.$$

Для оценок экспертов 0, 1, 2, 3, 4, 10 разность $A-B$ равна $\frac{5}{6}$. Значит, наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равно $\frac{5}{6}$.

Ответ: а) нет; б) да, например, для оценок 0, 1, 2, 3, 5, 6; в) $\frac{5}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *б* и *в* либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4