

Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

Вариант МА11001

13

а) Решите уравнение $\frac{13 \sin^2 x - 5 \sin x}{13 \cos x + 12} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

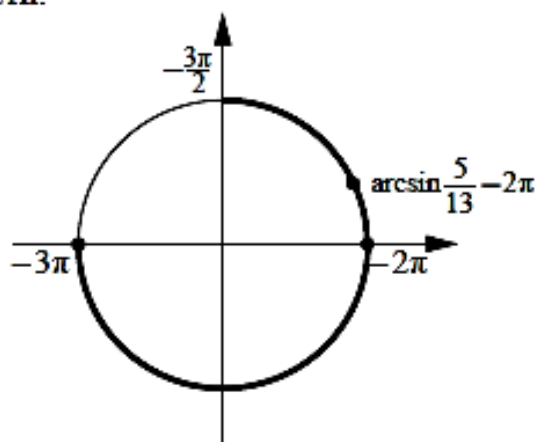
Решение.

а) Имеем

$$\frac{13 \sin^2 x - 5 \sin x}{13 \cos x + 12} = 0; \quad \frac{\sin x \left(\sin x - \frac{5}{13} \right)}{\cos x + \frac{12}{13}} = 0; \quad \begin{cases} \sin x = \frac{5}{13}, \\ \sin x = 0, \\ \cos x \neq -\frac{12}{13}, \end{cases}$$

откуда $x = \arcsin \frac{5}{13} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем -3π ; -2π ; $\arcsin \frac{5}{13} - 2\pi$.

Ответ: а) $\arcsin \frac{5}{13} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; πn , $n \in \mathbb{Z}$; б) -3π ; -2π ; $\arcsin \frac{5}{13} - 2\pi$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB=5$ и диагональю $BD=9$. Все боковые рёбра пирамиды равны 5. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E , а на ребре AS — точка F так, что $SF=BE=4$.

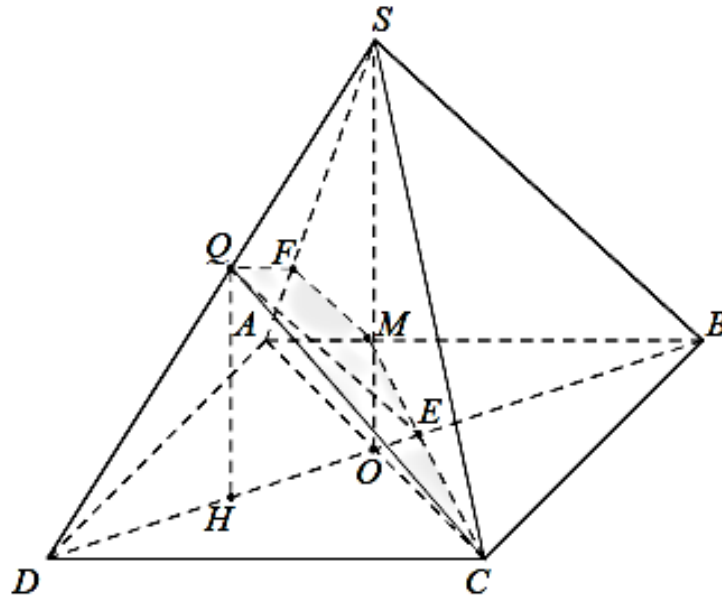
а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB .

б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q . Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC .

Решение.

а) Имеем $DE=9-BE=5$. Пусть прямая CE пересекает ребро AB в точке M .

Треугольники BME и DCE подобны, поэтому $\frac{BM}{DC} = \frac{BE}{DE} = \frac{4}{5}$, откуда $BM=4$. Тогда $AM=1$. Треугольники ABS и AMF подобны, значит, $FM \parallel SB$. Поэтому прямая SB параллельна плоскости CEF .



б) Из доказанного в предыдущем пункте следует, что $QE \parallel SB$. Тогда

$\frac{DQ}{QS} = \frac{DE}{EB} = \frac{5}{4}$. Пусть O — центр основания $ABCD$. Так как все боковые рёбра пирамиды равны, SO — высота пирамиды. Имеем

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{25 - \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{19}}{2}.$$

Плоскость SDB перпендикулярна плоскости основания, и проекция H точки Q на плоскость основания лежит на отрезке DO . Из подобия

треугольников DQH и DSO находим $QH = \frac{5}{9} \cdot SO = \frac{5\sqrt{19}}{18}$.

Ответ: $\frac{5\sqrt{19}}{18}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	2
Верно доказан пункт a . ИЛИ Верно решён пункт b при отсутствии обоснований в пункте a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

15

Решите неравенство $2^{|x|} - 6 - \frac{9 \cdot 2^{|x|} - 37}{4^{|x|} - 7 \cdot 2^{|x|} + 12} \leq \frac{1}{2^{|x|} - 4}$.

Решение.

Сделаем замену $y = 2^{|x|}$.

Получим

$$y - 6 - \frac{9y - 37}{y^2 - 7y + 12} \leq \frac{1}{y - 4};$$

$$y - 6 - \frac{9y - 37 + y - 3}{(y - 3)(y - 4)} \leq 0;$$

$$y - 6 - 10 \frac{y - 4}{(y - 3)(y - 4)} \leq 0;$$

$$\frac{(y - 8)(y - 1)(y - 4)}{(y - 3)(y - 4)} \leq 0;$$

$$-\infty < y \leq 1; 3 < y < 4; 4 < y \leq 8.$$

После обратной замены получаем $-3 \leq x < -2$; $-2 < x < -\log_2 3$; $x = 0$; $\log_2 3 < x < 2$; $2 < x \leq 3$.

Ответ: $[-3; -2)$; $(-2; -\log_2 3)$; $\{0\}$; $(\log_2 3; 2)$; $(2; 3]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

16

Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон BC и AC в точках M и N соответственно, E и F — середины сторон AB и AC соответственно. Прямые MN и EF пересекаются в точке D .

а) Докажите, что треугольник DFN равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника BED , если $AB = 28$ и $\angle ABC = 60^\circ$.

Решение.

а) Поскольку $CM = CN$, треугольник MCN равнобедренный. Прямые EF и BC параллельны, поэтому треугольник DFN подобен треугольнику MCN , следовательно, треугольник DFN также равнобедренный: $DF = FN$.

б) Обозначим $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Пусть p — полупериметр треугольника ABC . Предположим, что $a > c$. Тогда

$$BE = \frac{c}{2}, \quad CF = \frac{b}{2}, \quad CM = CN = p - c = \frac{a+b-c}{2},$$

$$FD = FN = CN - CF = \frac{a+b-c}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-c}{2}.$$

Значит, $ED = EF - FD = \frac{a}{2} - \frac{a-c}{2} = \frac{c}{2} = EB$, то есть треугольник BED

равнобедренный.

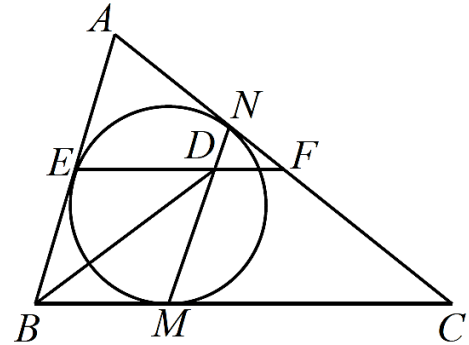
Аналогично для $a \leq c$.

Поскольку прямые ED и BC параллельны,

$$\angle BED = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Следовательно, $S_{BED} = \frac{1}{2} BE \cdot ED \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 14 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 49\sqrt{3}$.

Ответ: $49\sqrt{3}$.



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте b . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a . ИЛИ При обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

15 января планируется взять кредит в банке на 15 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в восьмой месяц кредитования нужно выплатить 29 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S . По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S; \frac{14S}{15}; \dots; \frac{2S}{15}; \frac{S}{15}; 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 4 %, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$$1,04S; 1,04 \cdot \frac{14S}{15}; \dots; 1,04 \cdot \frac{2S}{15}; 1,04 \cdot \frac{S}{15}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$\frac{15 \cdot 0,04S + S}{15}; \frac{14 \cdot 0,04S + S}{15}; \dots; \frac{2 \cdot 0,04S + S}{15}; \frac{0,04S + S}{15}.$$

В восьмой месяц выплата составит $\frac{8 \cdot 0,04 \cdot S + S}{15} = \frac{1,32S}{15}$. А всего следует выплатить

$$S + S \cdot 0,04 \left(1 + \frac{14}{15} + \dots + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} \right) = S \left(1 + \frac{16 \cdot 0,04}{2} \right) = 1,32S.$$

Значит, банку нужно вернуть $29\,000 \cdot 15 = 435\,000$ рублей.

Ответ: 435 000 рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	3

Найдите все значения параметра α из интервала $(0; \pi)$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4(x+y)\sin\alpha + 8\sin^2\alpha = 2\sin\alpha - 1, \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\sin\alpha + 4\sin^2\alpha \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Обозначим $a = \sin\alpha$. Получим систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4a(x+y) + 8a^2 = 2a - 1, \\ \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 2a + 4a^2. \end{cases}$$

Если пара $(x; y)$ — решение системы, то пара $(y; x)$ тоже решение.

Следовательно, единственное решение может иметь вид $(x; x)$, где $x \neq 0$.

Пусть $(x; x)$, где $x \neq 0$, — решение системы. Тогда

$$\begin{cases} x^2 + x^2 - 4a(x+x) + 8a^2 = 2a - 1, & \begin{cases} 2(x-2a)^2 = 2a - 1, \\ (2a-1)(a+1) = 0. \end{cases} \\ \frac{x}{x} + \frac{x}{x} = 2a + 4a^2; \end{cases}$$

Отсюда видим, что если $a = -1$, то система решений не имеет, а при $a = \frac{1}{2}$ система имеет единственное решение.

Решим уравнение $\frac{1}{2} = \sin\alpha$, $0 < \alpha < \pi$. Получим $\alpha = \frac{\pi}{6}$ и $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	3
С помощью верного рассуждения получены не все значения α	2
Задача верно сведена к решению системы двух уравнений с одной неизвестной	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	4

Восемь экспертов оценивали фильм. Каждый из них выставил оценку — целое число баллов от 0 до 12 включительно. Все эксперты выставили различные оценки. Старый рейтинг фильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. Новый рейтинг фильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки, и подсчитывается среднее арифметическое шести оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{20}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{24}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности старого и нового рейтингов.

Решение.

Обозначим рейтинг кинофильма, вычисленный по старой системе оценивания, через A , а рейтинг кинофильма, вычисленный по новой системе оценивания, через B .

а) Заметим, что $A = \frac{m}{8}$, $B = \frac{n}{6}$, где m и n — некоторые натуральные числа.

Значит, $A - B = \frac{m}{8} - \frac{n}{6} = \frac{3m - 4n}{24}$. Если $A - B = \frac{1}{20}$, то $3m - 4n = \frac{24}{20}$, что невозможно. Таким образом, разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, не может равняться $\frac{1}{20}$.

б) Например, для оценок экспертов 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равна

$$\frac{0+1+2+3+4+6+7+8}{8} - \frac{1+2+3+4+6+7}{6} = \frac{31}{8} - \frac{23}{6} = \frac{1}{24}.$$

в) Пусть x — наименьшая из оценок, z — наибольшая, а y — сумма остальных шести оценок. Тогда

$$\begin{aligned} A - B &= \frac{x + y + z}{8} - \frac{y}{6} = \frac{3x - y + 3z}{24} \leq \\ &\leq \frac{3x + 3z - ((x+1) + (x+2) + \dots + (x+6))}{24} = \\ &= \frac{3z - 3x - 21}{24} \leq \frac{3 \cdot 10 - 3 \cdot 0 - 21}{24} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Для оценок экспертов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10 разность $A - B$ равна $\frac{3}{8}$. Значит, наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равно $\frac{3}{8}$.

Ответ: а) нет; б) да, например, для оценок 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8; в) $\frac{3}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах <i>a</i> , <i>b</i> и <i>v</i>	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах <i>a</i> и <i>b</i> , либо получены верные обоснованные ответы в пунктах <i>b</i> и <i>v</i> либо получены верные обоснованные ответы в пунктах <i>a</i> и <i>v</i>	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте <i>a</i> , пункты <i>b</i> и <i>v</i> не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте <i>v</i> , пункты <i>a</i> и <i>b</i> не решены	2
Приведён пример в пункте <i>b</i> , пункты <i>a</i> и <i>v</i> не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4