Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

Вариант МА9002

21 Решите уравнение $x^4=(3x-4)^2$.

Решение.
Исходное уравнение приводится к виду

$$\left(x^2-3x+4\right)\left(x^2+3x-4\right)=0.$$

Уравнение $x^2-3x+4=0$ не имеет корней.
Уравнение $x^2+3x-4=0$ имеет корни -4 и 1.
Ответ: -4; 1.

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

22 Имеются два сосуда, содержащие 24 кг и 26 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 39 % кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 40 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе?

Решение.
Пусть концентрация кислоты в первом сосуде равна $C_1\%$, а во втором — $C_2\%$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{24C_1+26C_2}{50}=39,\\ \dfrac{C_1+C_2}{2}=40;\end{cases}\quad \begin{cases}24C_1+26C_2=1950,\\ C_1+C_2=80,\end{cases}$$

откуда $C_1=65$, $C_2=15$. Значит, в первом сосуде содержится 15,6 кг кислоты.
Ответ: 15,6 кг.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

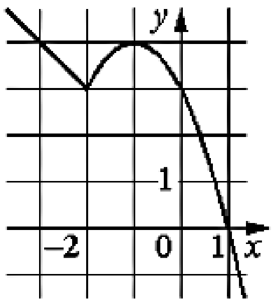
23 Постройте график функции

$$y=\begin{cases}-x^2-2x+3 & \text{при} \quad x\geq -2,\\ -x+1 & \text{при} \quad x<-2.\end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

Построим график функции $y=-x+1$ при $x<-2$ и график функции $y=-x^2-2x+3$ при $x\geq -2$.



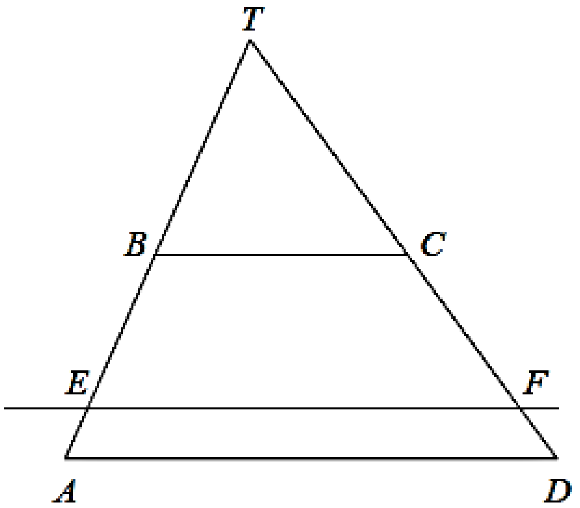
Прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки, если она проходит через вершину параболы или через точку $(-2;3)$. Получаем, что $m=3$ или $m=4$.

Ответ: 3; 4.

Баллы	Содержание критерия
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

24 Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если $AD=36$, $BC=18$, $CF:DF=7:2$.

Решение.



Пусть T — точка пересечения прямых AB и CD. Поскольку прямые AD, EF и BC параллельны, треугольники ATD, ETF и BTC подобны. Следовательно,

$$\frac{TD}{TC}=\frac{AD}{BC}=2,$$

откуда $CD=TC$, $CF=\frac{7}{9}CD=\frac{7}{9}TC$, а значит, $TF=\frac{16}{9}TC$.

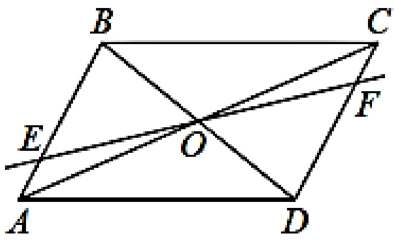
Получаем $\frac{EF}{BC}=\frac{TF}{TC}=\frac{16}{9}$, откуда $EF=32$.

Ответ: 32.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

25 Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Докажите, что отрезки AE и CF равны.

Доказательство.

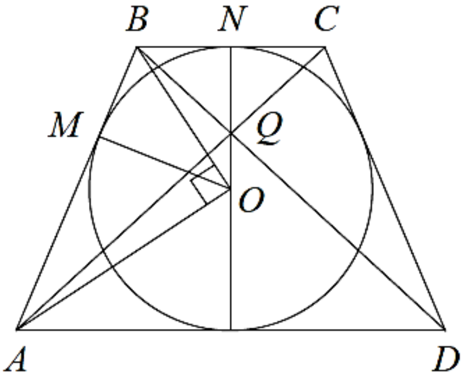


В треугольниках AEO и CFO стороны AO и CO равны по свойству диагоналей параллелограмма, $\angle EAO = \angle FCO$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и CD и секущей AC, а $\angle EOA = \angle FOC$ как вертикальные углы.
Значит, треугольники AEO и CFO равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, отрезки AE и CF равны.

Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

26 В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 40, а площадь равна 80, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

Решение.



Пусть BC — меньшее основание, AB — боковая сторона, AD — большее основание трапеции $ABCD$, M — точка касания окружности со стороной AB, N — со стороной BC, Q — точка пересечения диагоналей, O — центр окружности, r — её радиус (см. рисунок).
Поскольку трапеция описана около окружности, сумма её боковых сторон равна сумме оснований, то есть 20, поэтому

$$S_{ABCD} = 2r \cdot \frac{AD+BC}{2} = 20r.$$

Значит, $r=4$.

Прямые AD и BC параллельны. Значит, $\angle ABC+\angle BAD=180°$. Поскольку лучи AO и BO — биссектрисы углов BAD и ABC соответственно, получаем $\angle ABO+\angle BAO=90°$. Значит, треугольник AOB прямоугольный, а OM — его высота, опущенная на гипотенузу, поэтому

$$AM\cdot MB=OM^2=r^2;\quad AM(AB-AM)=r^2;\quad AM(10-AM)=16.$$

Учитывая, что $AM>BM$, из этого уравнения находим, что $AM=8$. Тогда $AD=16$, $BC=4$. Треугольник AQD подобен треугольнику CQB с коэффициентом подобия 4, значит, высота QN треугольника BQC составляет $\frac{1}{5}$ высоты трапеции, то есть диаметра вписанной в неё окружности.

Следовательно, $QN=\frac{1}{5}\cdot 8=1{,}6$.

Ответ: 1,6.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*