Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

Вариант MA9003

21 Решите уравнение $x^4=(4x-5)^2$.

Решение.
Исходное уравнение приводится к виду

$$\left(x^2-4x+5\right)\left(x^2+4x-5\right)=0.$$

Уравнение $x^2-4x+5=0$ не имеет корней.
Уравнение $x^2+4x-5=0$ имеет корни -5 и 1.
Ответ: -5; 1.

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

22 Имеются два сосуда, содержащие 4 кг и 16 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 57 % кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 60 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе?

Решение.
Пусть концентрация кислоты в первом сосуде равна $C_1\%$, а во втором — $C_2\%$.
Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{4C_1+16C_2}{20}=57,\\ \dfrac{C_1+C_2}{2}=60;\end{cases}\quad \begin{cases}4C_1+16C_2=1140,\\ C_1+C_2=120,\end{cases}$$

откуда $C_1=65$, $C_2=55$. Значит, в первом сосуде содержится 2,6 кг кислоты.
Ответ: 2,6 кг.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

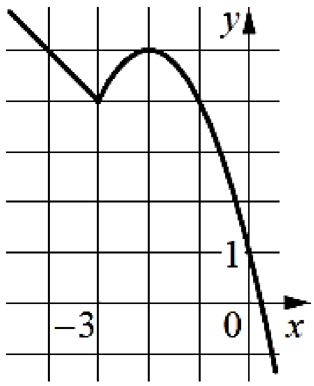
23 Постройте график функции

$$y=\begin{cases}-x^2-4x+1 & \text{при} \quad x\geq -3,\\ -x+1 & \text{при} \quad x<-3.\end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

Построим график функции $y=-x+1$ при $x<-3$ и график функции $y=-x^2-4x+1$ при $x\geq -3$.



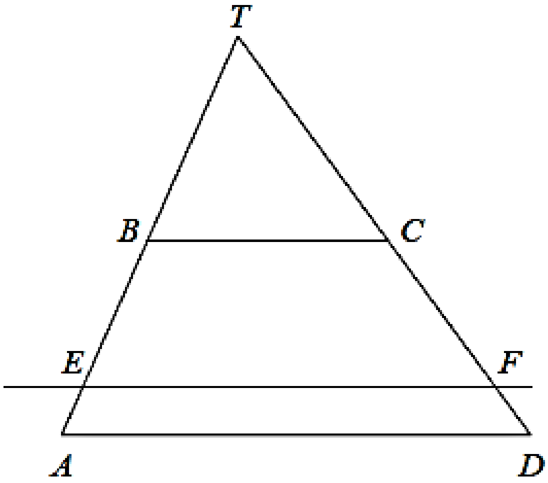
Прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки, если она проходит через вершину параболы или через точку $(-3;4)$. Получаем, что $m=4$ или $m=5$.

Ответ: 4; 5.

Баллы	Содержание критерия
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

24 Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если $AD = 45$, $BC = 20$, $CF : DF = 4 : 1$.

Решение.



Пусть T — точка пересечения прямых AB и CD. Поскольку прямые AD, EF и BC параллельны, треугольники ATD, ETF и BTC подобны. Следовательно,

$$\frac{TD}{TC} = \frac{AD}{BC} = 2{,}25,$$

откуда $CD = 1{,}25TC$, $CF = \frac{4}{5}CD = TC$, а значит, $TF = 2TC$.

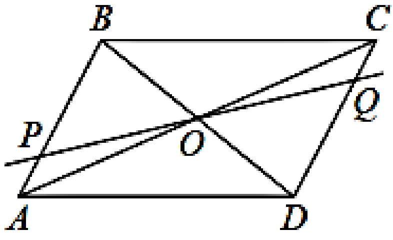
Получаем $\frac{EF}{BC} = \frac{TF}{TC} = 2$, откуда $EF = 40$.

Ответ: 40.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

25 Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках P и Q соответственно. Докажите, что отрезки BP и DQ равны.

Доказательство.



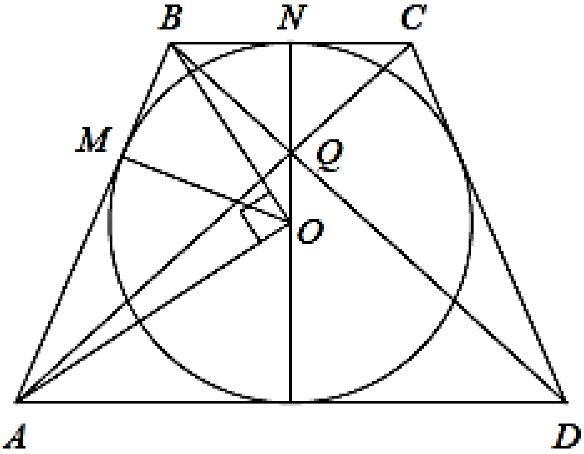
В треугольниках BPO и DQO стороны BO и DO равны по свойству диагоналей параллелограмма, $\angle PBO = \angle QDO$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и CD и секущей BD, а $\angle POB = \angle QOD$ как вертикальные углы. Значит, треугольники BPO и DQO равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, отрезки BP и DQ равны.

Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

26 В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 200, а площадь равна 1500, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

Решение.

Пусть BC — меньшее основание, AB — боковая сторона, AD — большее основание трапеции $ABCD$, M — точка касания окружности со стороной AB, N — со стороной BC, Q — точка пересечения диагоналей, O — центр окружности, r — её радиус (см. рисунок).



Поскольку трапеция описана около окружности, сумма её боковых сторон равна сумме оснований, то есть 100, поэтому

$$S_{ABCD} = 2r \cdot \frac{AD+BC}{2} = 100r.$$

Значит, $r = 15$.

Прямые AD и BC параллельны. Значит, $\angle ABC + \angle BAD = 180°$. Поскольку AO и BO — биссектрисы углов BAD и ABC соответственно, получаем, что $\angle ABO + \angle BAO = 90°$. Значит, треугольник AOB прямоугольный, а OM — его высота, опущенная на гипотенузу, поэтому

$$AM \cdot MB = OM^2 = r^2; \quad AM(AB - AM) = r^2; \quad AM(50 - AM) = 225.$$

Учитывая, что $AM > BM$, из этого уравнения находим, что $AM = 45$. Тогда $AD = 90$, $BC = 10$. Треугольник AQD подобен треугольнику CQB с коэффициентом 9, значит, высота QN треугольника BQC составляет $\frac{1}{10}$ высоты трапеции, то есть диаметра окружности. Следовательно,

$$QN = \frac{1}{10} \cdot 30 = 3.$$

Ответ: 3.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*