Критерии оценивания заданий с развернутым ответом

Вариант МА110001   Вариант МА110003

13 *а*) Решите уравнение $2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{tg}x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

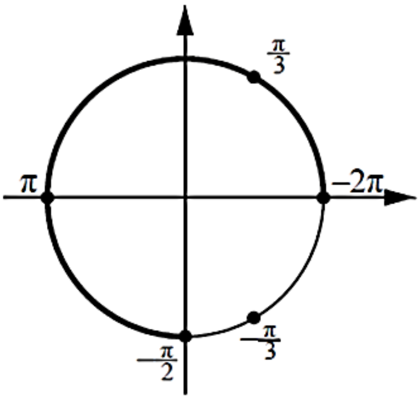
$$2\sin x=\frac{\sin x}{\cos x};\qquad \sin x\left(2-\frac{1}{\cos x}\right)=0;$$

$$\sin x=0 \text{ или } \cos x=\frac{1}{2},$$

откуда

$$x=\pi k \text{ или } x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни на промежутке $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$ с помощью тригонометрической окружности.



Получаем $x=-2\pi$; $x=-\frac{5\pi}{3}$ и $x=-\pi$.

Ответ: а) πk, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) -2π, $-\frac{5\pi}{3}$, $-\pi$.

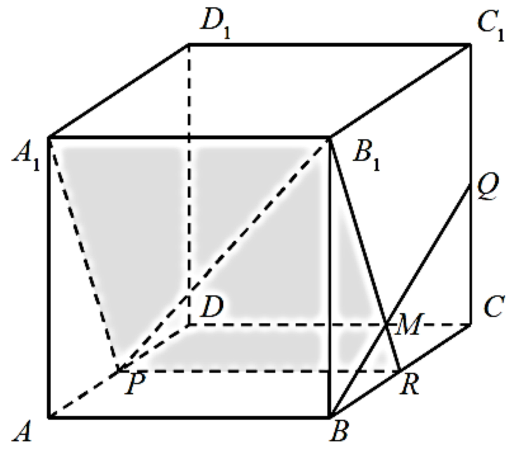
Баллы	Критерии оценивания выполнения задания
2	Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах
1	Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

14 Точки P и Q — середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1P и QB перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой BQ, если ребро куба равно 4.

Решение.



а) Проведём отрезок B_1R, параллельный A_1P. Пусть M — точка пересечения отрезков B_1R и QB. Треугольник BMR прямоугольный с прямым углом при вершине M. Это следует из равенства треугольников RB_1B и QBC. Значит, прямые QB и B_1R перпендикулярны. Прямые QB и PR перпендикулярны, так как прямая PR перпендикулярна плоскости BCC_1. Поэтому прямая QB перпендикулярна плоскости A_1B_1P, и, следовательно, прямая QB перпендикулярна прямой B_1P.

б) Указанное сечение — прямоугольник A_1B_1RP. Его площадь равна $A_1B_1 \cdot A_1P = 8\sqrt{5}$.

Ответ: б) $8\sqrt{5}$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания
2	Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*
1	Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

15 Решите неравенство $\dfrac{\log_2(8x)\cdot\log_3(27x)}{x^2-|x|}\le 0$.

Решение.
Перейдём к системе

$$\begin{cases}\dfrac{(8x-1)(27x-1)}{x(x-1)}\le 0,\\ x>0,\end{cases}$$

откуда $0<x\le\dfrac{1}{27}$ или $\dfrac{1}{8}\le x<1$.

Ответ: $\left(0;\ \dfrac{1}{27}\right];\ \left[\dfrac{1}{8};1\right)$.

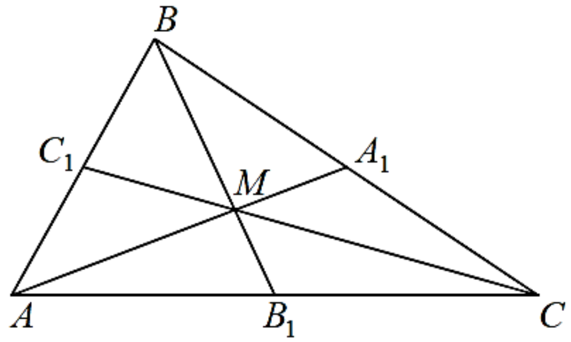
Баллы	Критерии оценивания выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек $\dfrac{1}{27}$ и/или $\dfrac{1}{8}$ ИЛИ Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

16 Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC=3MB$.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC=12$.

Решение.
а) Известно, что медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины. Значит,

$$BB_1 = \frac{3}{2}BM = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}AC = \frac{1}{2}AC.$$

Можно построить окружность с центром B_1 и радиусом $\frac{1}{2}AC$. Вписанный угол ABC опирается на диаметр, поэтому он равен 90°. Следовательно, треугольник ABC прямоугольный.



б) Треугольник A_1BA прямоугольный. Поэтому

$$AA_1^2 = A_1B^2 + BA^2 = \frac{1}{4}CB^2 + BA^2.$$

Аналогично из прямоугольного треугольника C_1BC находим

$$CC_1^2 = C_1B^2 + BC^2 = \frac{1}{4}AB^2 + BC^2.$$

Сложим полученные равенства:

$$AA_1^2 + CC_1^2 = \frac{5}{4}AB^2 + \frac{5}{4}BC^2 = \frac{5}{4}\left(AB^2 + BC^2\right) = \frac{5}{4}AC^2 = 180.$$

Ответ: б) 180.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания
3	Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*
2	Обоснованно получен верный ответ в пункте б. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки
1	Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
3	*Максимальный балл*

17 Строительство нового завода стоит 115 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0,5x^2+x+9$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px-\left(0,5x^2+x+9\right)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 5 лет?

Решение.

Прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составляет

$$px-\left(0,5x^2+x+9\right)=-0,5x^2+(p-1)x-9.$$

Это выражение является квадратным трёхчленом и достигает своего наибольшего значения при $x=p-1$. Наибольшее значение равно $\frac{(p-1)^2}{2}-9$. Строительство завода окупится не более чем за 5 лет, если

$$\frac{(p-1)^2}{2}-9\geq\frac{115}{5};\ (p-1)^2\geq 64;\ (p-9)(p+7)\geq 0,$$

то есть при $p\geq 9$, поскольку цена продукции не может быть отрицательной. Таким образом, наименьшее значение $p=9$.

Ответ: $p=9$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания
3	Верно построена математическая модель, обоснованно получен верный ответ
2	Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки
1	Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, пере-численных выше
3	*Максимальный балл*

18 Найдите все целые отрицательные значения параметра a, при каждом из которых существует такое действительное число $b > a$, что неравенство $21b \geq 6|a+b| - 3|b-2| - |a-b| - 9|a^2 - b + 2| + 16$ **не выполнено.**

Решение.

Решим вспомогательную противоположную задачу: найдём все a, при каждом из которых неравенство $21b \geq 6|a+b| - 3|b-2| - |a-b| - 9|a^2 - b + 2| + 16$ выполнено при любом $b > a$. Заметим далее, что данное неравенство равносильно неравенству

$$F(b) = 21b - 6|a+b| + 3|b-2| + |a-b| + 9|a^2 - b + 2| - 16 \geq 0,$$

причём функция $F(b)$ строго монотонно возрастает на множестве действительных чисел и, следовательно, первоначальное неравенство выполняется для всех $b > a$ тогда и только тогда, когда $F(a) \geq 0$, то есть $9a^2 + 12a - 12|a| + 3|a-2| + 2 \geq 0$. Отметим, что при $a \geq 0$ полученное неравенство верно. Если $a < 0$, то неравенство равносильно неравенству

$$9a^2 + 21a + 8 \geq 0; \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{-7+\sqrt{17}}{6} \leq a < 0; \\ a \leq \dfrac{-7-\sqrt{17}}{6} \end{array} \right.$$

Таким образом, существует только одно целое отрицательное значение $a = -1$, при котором условие вспомогательной задачи не выполнено. Следовательно, при значении $a = -1$ существует такое $b > a$, что неравенство $21b \geq 6|a+b| - 3|b-2| - |a-b| - 9|a^2 - b + 2| + 16$ не выполнено.

Ответ: -1.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания
4	Обоснованно получен верный ответ
3	С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение
2	С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения
1	Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
4	*Максимальный балл*

19 а) Можно ли в числителе и знаменателе дроби $\frac{1*3*6*15}{1*4*8*16}$ вместо всех знаков $*$ так расставить знаки + и –, чтобы эта дробь стала равна $\frac{5}{3}$?

б) Можно ли в числителе и знаменателе дроби $\frac{1*3*6*9*12}{1*4*8*12*16}$ вместо всех знаков $*$ так расставить знаки + и –, чтобы эта дробь стала равна $\frac{4}{7}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать выражение $\left|\frac{3}{4}-\frac{1*3*6*9*12}{1*4*8*12*16}\right|$, если всевозможными способами заменять каждый из знаков $*$ на + или –?

Решение.

а) Да. Например, $\frac{1+3+6-15}{1+4+8-16}=\frac{5}{3}$.

б) Рассмотрим какую-либо возможную расстановку знаков в знаменателе $1*4*8*12*16$ данной дроби. Имеем $1\pm4\pm8\pm12\pm16=1+4(\pm1\pm2\pm3\pm4)$, где знаки + и – расставлены соответствующим образом. Сумма всех чисел в последних скобках чётна и может принимать значения вида $2m$, где m — некоторое целое число от -5 до 5. Значит, знаменатель дроби равен $8m+1=7m+(m+1)$. Среди всех возможных значений m знаменатель делится на 7 лишь при $m=-1$. Следовательно, если знаки расставлены так, что данная дробь равна $\frac{4}{7}$, то её знаменатель $1*4*8*12*16$ равен -7. Тогда её числитель $1*3*6*9*12$ равен -4. Пришли к противоречию, так как число $1\pm3\pm6\pm9\pm12$ всегда при делении на 3 даёт остаток 1, а число -4 — остаток 2. Значит, расставить знаки требуемым образом невозможно.

в) Аналогично доказанному в пункте б) получаем, что при всевозможных расстановках знаков + и – выражение примет вид $\left|\frac{3}{4}-\frac{6k+1}{8m+1}\right|$, где k и m пробегают все целые числа от -5 до 5. Поскольку $\frac{3}{4}=\frac{6m+\frac{3}{4}}{8m+1}$, получаем $\left|\frac{3}{4}-\frac{6k+1}{8m+1}\right|=\left|\frac{6(m-k)-\frac{1}{4}}{8m+1}\right|$. При фиксированном значении m это выражение минимально при $k=m$. В этом случае оно равно $\left|\frac{1}{32m+4}\right|$. Так как m пробегает все целые числа от -5 до 5, максимум модуля $32m+4$ достигается при $m=5$. Значит, наименьшее значение, которое может принимать выражение $\left|\frac{3}{4}-\frac{1*3*6*9*12}{1*4*8*12*16}\right|$, если всевозможными способами заменять каждый из знаков * на + или –, равно $\frac{1}{164}$. Оно достигается при $k = m = 5$ — в случае, когда каждый из знаков * заменён на +.

Ответ: а) Да. б) Нет. в) $\frac{1}{164}$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания
4	Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*
3	Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *б* и *в*
2	Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены
1	Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
4	*Максимальный балл*